１９９９年度

東京大学（三角関数)、愛知教育大学（折り紙）北海道大学（整数問題・ピタゴラス数）

① 歴史的問題　東京大学・前期

1

（１）一般角θに対して $\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義を述べよ。

（２）（１）で述べた定義にもとづき、一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

聖文社の「全国大学入試問題正解」に『歴史的問題』と評された。ある予備校の出口調査では、正解率は５０％位であったというが、浪人生にとっては予想だにせぬもんだいであっただろう。この問題の影響を受けてか、お茶の水女子大学では、２０００年、２００１年、２００２年と定義に関する問題が出題された

② １９９９年度後期　愛知教育大学・数学科

Ⅱ　封筒の中の折り紙を一辺の長さが２の正方形と見なそう。これらのうち、２枚は提出用、残りは練習用である。折り方を評価するので、提出用には途中経過の折り目をはっきり残し、不要な折り目やしわ等はできるだけつけないようにすること。(折り紙が足らなくなったときは試験管に申し出ること)

（１）　一辺の長さ２の正方形を折って、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ の各々の長さの線分を作りたい。各々について、折る手順を述べ、それらを１枚の折り紙の上で実行せよ。

注意　各長さについて、できた線分を鉛筆でなぞり、そばに長さを明記すること

（２）　折り紙（頂点を A,B,C,D とする）を折って正五角形を作りたい。辺 AB 上に一辺を持つ正五角形のうちで最大のものの折り方を述べ、その折り方を折り紙の上で実行せよ。

注意　できた正五角形の４辺を鉛筆でなぞること。

（３）　正方形に含まれる正五角形のうちで、上のような「その五角形の一辺に含まれるもの」よりも大きなものがあるか否か考察せよ。

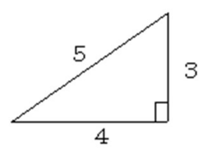
※　このような問題が出題できるのも受験生が少ないためだろうが、手が出なかった受験生も多かったと思われる。

③ １９９９年度後期　北海道大学・理・工学部

３　３辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形を考える。

（１）　直角をはさむ２辺の長さのうち、少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

（２）　図のように、斜辺の長さと２番目に長い辺の長さの差が１であるような例を他に３つあげよ。



【解答】

（1）直角をはさむ２辺の長さをa，b,斜辺の長さをcとすると

$$a^2+b^2=c^2$$

である。

a,bがともに奇数、すなわち

$$a=2a'-1,\ b=2b'-1$$

と仮定すると

$$c^2=(2a'-1)^2+(2b'-1)^2$$

$$=4\left(a'^2+b'^2-a'-b'\right)+2$$

c^2が偶数なので、cも偶数であり、$c=2c'$とおける。

このとき、

$$(2c')^2=4\left(a'^2+b'^2-a'-b'\right)+2$$

$$\therefore\quad 2c'^2=2\left(a'^2+b'^2-a'-b'\right)+1$$

偶数＝奇数となり不合理である。

（2）$a \leqq b=c-1$とすると

$$a^2+(c-1)^2=c^2 \qquad \therefore\quad a^2=2c-1$$

平方数が奇数になるaを考えると

$(a, c), (7, 25), (9, 41), \cdots$

よって、(a, b, c)としては

$(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41)$など。