２００６年度　（京都大学前期・後期、早稲田大学）

京都大学　前期　理

第4問

2以上の自然数 n 似たいし、 n と n^2+2 が共に素数になるのは、 $n=3$ のときに限ることを示せ。

【解答】

（Ⅰ）　$n=3$ のとき

$n^2+2=11$ だから、 n と n^2+2 は共に素数である。

（Ⅱ）　$n \fallingdotseq 3$ のとき

nが素数だとすると、 n は３の倍数ではないから

$n=3k\pm1$ と表せる。

このとき、

$$
\begin{aligned}
n^2+2&=(3k\pm1)^2+2 \\
&=3(3k\pm2k+1)
\end{aligned}
$$

となり、 n^2+2 は素数ではない。

京都大学　後期　理

6　$\tan 1^\circ$ は有理数か。

【解答】

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定する。

このとき、自然数($k\leqq 88$)に対して、$\tan k^\circ$ が有理数ならば

$$\tan(k+1)^\circ=\frac{\tan k^\circ+\tan 1^\circ}{1-\tan k^\circ \tan 1^\circ}$$

より、$\tan(k+1)^\circ$ も有理数となるので、帰納的に

$$\tan n^\circ (n=1,2,\cdots,89)は有理数となる。$$

これから、$\tan 60^\circ$ は有理数。

ところが、$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ は無理数である。

これは、矛盾。

よって、$\tan 1^\circ$は無理数である。

3　xy平面上の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$に対し、原点Oを始点として、$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$となるように点$A$, Bをとる。線分OAからOBまで反時計回りに計った角がθのとき

$$[\vec{a}, \vec{b}]=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

と定義する。$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$のときは$[\vec{a}, \vec{b}]=0$と定める。

(1)　3つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$に対して、等式

$$[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{a}, \vec{c}]$$

を示せ。

(2)　原点Oを始点とするベクトル$\overrightarrow{a_n}=(x_n, y_n)$を

$$\overrightarrow{a_1}=\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \overrightarrow{a_2}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{a_n}=2\vec{a}_{n-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

によって定める。

さらに、$n \geqq 1$に対して$r_n=[\vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}]$とする。

(i)　r_1を求めよ。

(ii)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r_n$の和を求めよ。