2007 年度

東京大学

2 r は $0<r<1$ をみたす実数，n は 2 以上の整数とする．平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件 ①，② をみたす 2 つの円で置き換える操作 (P) を考える．

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい．

② 新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に内接する．

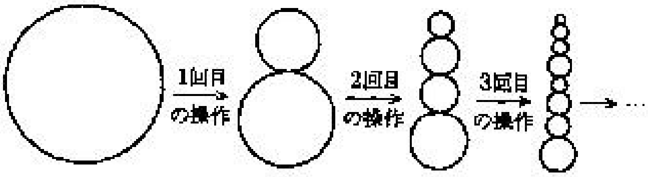
以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る．

- 最初に，平面上に半径 1 の円を描く．
- 次に，この円に対して操作 (P) を行い，2 つの円を得る（これを 1 回目の操作という）．
- k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作 (P) を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$．

(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ．

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ．

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ．



解答

2 $\boxed{\text{B}}$ (等比数列)

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 半径 R の円に操作 (P) を施すと，半径 rR，$(1-r)R$ の円が作られる．その円周の長さの和は

$$2\pi rR+2\pi(1-r)R=2\pi R$$

であり，半径 R の円周の長さに等しい．

すなわち，操作 (P) により，円周の長さの和は変らないので，求める長さは 2π である．

(2) 1 回目の操作で作られる円の半径は

$$r,\ 1-r$$

であり，2 回目の操作で作られる円の半径は

$$r^2,\ r(1-r),\ r(1-r),\ (1-r)^2$$

である．よって，求める面積は

$$\pi r^4+2\pi r^2(1-r)^2+\pi(1-r)^4$$
$$=\pi(r^2+(1-r)^2)^2$$
$$=\pi(2r^2-2r+1)^2$$

(3) 半径 R の円に操作 (P) を施して作られる円の面積の和は

$$\pi r^2R^2+\pi(1-r)^2R^2$$
$$=\pi R^2(r^2+(1-r)^2)$$
$$=\pi R^2(2r^2-2r+1)$$

である．即ち，操作 (P) により，円の面積は（その円の半径によらず）$(2r^2-2r+1)$ 倍になる．ゆえに，k 回目の操作で得られた円のそれぞれに操作 (P) を施せば，得られた円の面積の和は，元の円の面積の和の $(2r^2-2r+1)$ 倍になる．よって，求める面積は

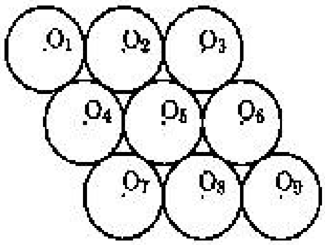
$$\pi(2r^2-2r+1)^n$$

である．

岩手大学

3 直径1の9つの円 O_1, …, O_9 が図のように接して並んでいる．動点 P が円 O_1 の周上を動き，点 Q が以下の (1) から (4) の状態にあるとき，それぞれについて P と Q の距離の最大値および最小値を求めよ．

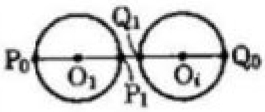
(1) 点 Q は円 O_5 の周上を動く．
(2) 点 Q は円 O_9 の周上を動く．
(3) 点 Q は円 O_8 の周上を動く．
(4) 点 Q は円 O_6 と円 O_9 の接点である．



解答

3 A (2円の位置関係)

解答 Q を O_i $(i=5,\ 8,\ 9)$ 上とする．直線 O_1O_i と円の交点を図のように P_0, P_1, Q_1, Q_0 と定めると，PQ の



最大値: $P_0Q_0 = O_1O_i + 1$
最小値: $P_1Q_1 = O_1O_i - 1$

である．また，互いに外接する3円の中心は，1辺が1の正3角形の3頂点である．

(1) $O_1O_5 = \sqrt{3}$ から

PQ の**最大値**: $\sqrt{3}+1$，**最小値**: $\sqrt{3}-1$

(2) $O_1O_9 = 2O_1O_5 = 2\sqrt{3}$ から

PQ の**最大値**: $2\sqrt{3}+1$，**最小値**: $2\sqrt{3}-1$

(3) $\triangle O_1O_8O_7$ で，余弦定理から

$$O_1O_8{}^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cos 120^\circ = 7$$

$$\therefore\ O_1O_8 = \sqrt{7}$$

$\therefore$ PQ の**最大値**: $\sqrt{7}+1$，**最小値** $\sqrt{7}-1$

(4) Q は O_6O_9 の中点．$\triangle O_1QO_3$ で，余弦定理から

$$O_1Q^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot \frac{3}{2}\cos 120^\circ = \frac{37}{4}$$

$$\therefore\ O_1Q = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

よって，PQ の

最大値: $O_1Q + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{37}+1}{2}$

最小値: $O_1Q - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{37}-1}{2}$