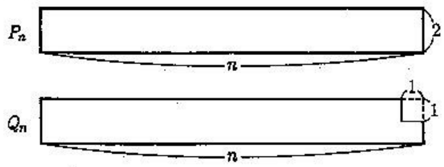
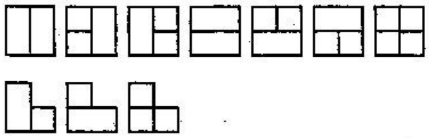
2008 年度

金沢大学　後期　理工（機械工、電子情報、数物科学類）

5 自然数 n に対して辺の長さが 2 と n の長方形を P_n とする．下図のように P_n から一辺の長さ 1 の正方形を除いた図形を Q_n とする．



この 2 つの図形 P_n と Q_n を，一辺の長さ 1 の正方形および辺の長さが 1 と 2 の長方形のタイルを用いて，すきまなく埋めることを考える．P_n および Q_n をタイルで埋める異なるパターンの数を，それぞれ p_n および q_n とする．例えば P_2 と Q_2 を埋める異なるパターンはそれぞれ



となり，$p_2=7$，$q_2=3$ である．次の問いに答えよ．

(1) q_3 と p_3 を求めよ．

(2) q_{n+2} および p_{n+2} を p_{n+1}，q_{n+1}，p_n を用いてあらわせ．

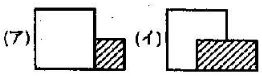
(3) $\begin{pmatrix} p_{n+2} \\ q_{n+2} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$ を満たす 3 次正方行列 A を求めよ．

(4) p_5 の値を求めよ．

解答

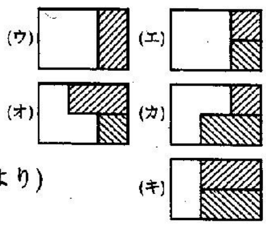
5 B (漸化式)

解答 (1) Q_3 の右端は (ア)，(イ) のいずれかで，それぞれ残りの部分は P_2，Q_2 の埋め方と同じだから



$q_3 = p_2 + q_2 = 7 + 3 = \mathbf{10}$

P_3 の右端は (ウ) ～ (キ) のいずれかで，それぞれ P_2，P_2，Q_2，Q_2，P_1 の埋め方と同じだから



$$\begin{aligned} p_3 &= 2p_2 + 2q_2 + p_1 \\ &= 14 + 6 + 2 \quad (p_1 = 2 \text{ より}) \\ &= \mathbf{22} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に Q_{n+2}，P_{n+2} の右端の状況を考えて

$$\boldsymbol{q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1}}$$

$$\boldsymbol{p_{n+2} = 2p_{n+1} + 2q_{n+1} + p_n}$$

(3) (2) より

$$\begin{pmatrix} p_{n+2} \\ q_{n+2} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(4) $p_4 = 2p_3 + 2q_3 + p_2 = 44 + 20 + 7 = 71$

$q_4 = p_3 + q_3 = 22 + 10 = 32$

$\therefore \quad p_5 = 2p_4 + 2q_4 + p_3 = 142 + 64 + 22 = \mathbf{228}$

千葉大学　後期　理（数学・情報）

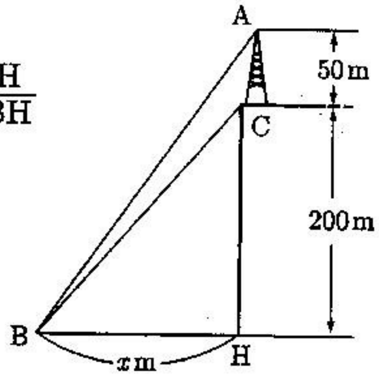
5　地上にいる人が、高さ 200m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50m の鉄塔を見る。鉄塔の上端をＡ、この人をｂ、鉄塔の下端をｃとするとき、∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何ｍ離れたときか。ただし、この人の身長は無視することとし、また、ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

解答

5 Ⅱ (加法定理とその応用)

解答　ビルの下端を H とし，BH $= x$ (m) とする．

$$\tan\angle ABC$$
$$= \tan(\angle ABH - \angle CBH)$$
$$= \frac{\tan\angle ABH - \tan\angle CBH}{1+\tan\angle ABH\tan\angle CBH}$$
$$= \frac{\frac{250}{x} - \frac{200}{x}}{1+\frac{250}{x}\cdot\frac{200}{x}}$$
$$= \frac{50}{x+\frac{50000}{x}}$$



$$x+\frac{50000}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{50000}{x}} = 200\sqrt{5}$$

であるから

$$0 < \tan\angle ABC \leqq \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

したがって，$x = \dfrac{50000}{x}$ のとき，つまり，$x = 100\sqrt{5}$ (m) のとき，$\tan\angle ABC$ は最大になり，このとき ∠ABC は最大になる．

奈良女子大学　前期　理・生活環境学部

（1）2つの正の実数a, b $(a<b)$に対し、次の不等式を示せ。

（i）　$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<b$

（ii）　$a<\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$

（2）次の不等式を示せ。

（i）　$\dfrac{1221}{116}<\sqrt{111}<\dfrac{116}{11}$

（ii）　$\dfrac{283272}{26887}<\sqrt{111}<\dfrac{26887}{2552}$

解答

（1）証明略

（2）の証明

（i）（1）の結果から

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}\quad\cdots①$$

ここで、$111<121=111^2$　であるから$\dfrac{111}{11}<11$

$a=\dfrac{111}{11}$, $b=11$ とおくと、①より

$$\frac{2\cdot\frac{111}{11}\cdot 11}{\frac{111}{11}+11}<\sqrt{\frac{111}{11}\cdot 11}<\frac{\frac{111}{11}+11}{2}$$

よって、

$$\frac{1221}{116}<\sqrt{111}<\frac{116}{11}$$

（ii）　$a=\dfrac{1221}{116}$, $b=\dfrac{116}{11}$ とおくと、①より

$$\frac{2\cdot\frac{1221}{116}\cdot\frac{116}{11}}{\frac{1221}{116}+\frac{116}{11}}<\sqrt{\frac{1221}{116}\cdot\frac{116}{11}}<\frac{\frac{1221}{116}+\frac{116}{11}}{2}$$

よって

$$\frac{283272}{26887}<\sqrt{111}<\frac{26887}{2552}$$