2009 年度

鳴門教育大学　前期　学校教育学部

$\boxed{4}$　下の問題について(1)、(2)に答えなさい。

問題　$\boxed{ア}$から$\boxed{イ}$までの数字を１つずつ書いた$\boxed{ウ}$枚のカードの中から２枚のカードを同時に取り出す。このとき、その２枚のカードの数の$\boxed{エ}$である確率を求めなさい。

（１）$\boxed{ア}$には10より大きい自然数を、$\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$には3桁の自然数を、$\boxed{エ}$には適切な文を入れて、確率の加法定理を用うる問題となるような問題文を完成させなさい。

（２）完成させた問題の確率を確率の加法定理を用いて解きなさい。

【解答】

例えば、ア：11　イ：110　ウ：100　エ：積が偶数

100枚のカードから2枚のカードを同時に取り出す

取り出し方は全部で ${}_{100}C_2$ 通りで、このうち、2枚の

カードの積が偶数になるのは

①　1枚が偶数で、1枚が奇数の場合

${}_{50}C_1 \times {}_{50}C_1$ 通り

②　2枚とも偶数の場合

${}_{50}C_2$ 通り

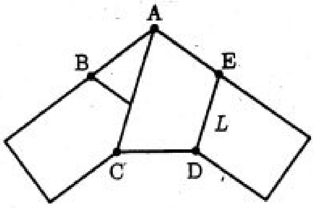
求める確率は

$$\frac{{}_{50}C_1 \times {}_{50}C_1}{{}_{100}C_2} + \frac{{}_{50}C_2}{{}_{100}C_2} = \frac{149}{198}$$

1 1810 年に会田安明（1747–1817）の和算書「算法天生法指南」が発行された．そこにはつぎのような問題が掲載されている．

今以横長紙結之，作五角形，只云横一寸五角形幾何．答曰…

幅一寸（約 3 cm）の横長の紙を結んで正五角形 ABCDE を作れば，その正五角形の一辺の長さはどれほどか，という問題である．図で示せば右のようになる．



これを解くために，$x=\cos 18^\circ$ の値をもとめる．x は方程式

$$\boxed{}x^4-\boxed{}x^2+5=0$$

をみたす．これより，もとめる正五角形の一辺の長さ L は

$$\sqrt{\boxed{}-\frac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}}\quad（寸）$$

であることがわかる．その正五角形の面積は

$$\frac{L^2}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}+\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}\quad（寸^2）$$

である．

解答

1 II（加法定理とその応用）

解答　$\theta=18^\circ$ とおくと，

$$\cos 5\theta=\cos 90^\circ=0 \quad \cdots\cdots①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=\cos(3\theta+2\theta)\\&=\cos 3\theta\cos 2\theta-\sin 3\theta\sin 2\theta\\&=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)(2\cos^2\theta-1)\\&\quad-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}&(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=2\cos\theta\sin^2\theta(3-4\sin^2\theta)\\&=2\cos\theta(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta-1)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=(4x^3-3x)(2x^2-1)-2x(1-x^2)(4x^2-1)\\&=16x^5-20x^3+5x\end{aligned}$$

よって，① より，

$$16x^5-20x^3+5x=0$$

であるから，$x=\cos 18^\circ>\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，および，

これより，$x^2>\frac{3}{4}$ であることに注意すると，

$$\mathbf{16x^4-20x^2+5=0}$$

$$\therefore\ x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}\qquad \therefore\ x=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

いま，C から直線 AB に下ろした垂線の足を H とすると，BC $=L$，CH $=1$，∠BCH $=18^\circ$ であるから，

$$L=\frac{1}{\cos 18^\circ}=\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}=\sqrt{\mathbf{2}-\frac{\mathbf{2\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}}$$

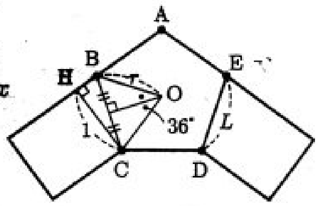
一方，正五角形 ABCDE の外接円の中心を O，半径を r，面積を S とすると，

$$S=5\cdot\frac{1}{2}r^2\sin 72^\circ=\frac{5}{2}r^2\cos 18^\circ=\frac{5}{2}r^2x$$

$$L=2r\sin 36^\circ=4r\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4r\sqrt{1-x^2}\,x$$

となるから，これらより，

r を消去して，



$$S=\frac{5}{2}\left(\frac{L}{4\sqrt{1-x^2}\,x}\right)^2x$$

$$=\frac{5L^2}{32(1-x^2)x}$$

$$=\frac{5L^2}{32}\cdot\frac{8}{3-\sqrt{5}}\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{5L^2}{4}\sqrt{\frac{8}{(3-\sqrt{5})^2(5+\sqrt{5})}}$$

$$=\frac{5L^2}{4}\sqrt{\frac{1}{5-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{5L^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}=\frac{L^2}{\mathbf{4}}\sqrt{\mathbf{25}+\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{5}}}$$