2010 年度

金沢大学 前期　理工　　ビー玉の箱詰め

6 M, N は 2 以上の自然数とする．高さ $2M$，幅 $2N$ の長方形 R に次の 2 通りの方法で半径 1 の円を詰め込んでいく．

方法 A（図 1 を参照）

(i) 1 段目は N 個の円を底に置く．

(ii) 次の段はすぐ下の段の円の上にくるように N 個の円を詰める．

(iii) 長方形 R に詰め込めなくなるまで (ii) を繰り返す．その結果詰め込まれた円の総数を $V_A(M, N)$ とおく．

方法 B（図 2 を参照）

(i) 1 段目は N 個の円を底に置く．

(ii) 偶数段目はすぐ下の段の円のすき間にはさまれるように $N-1$ 個の円を詰める．

(iii) 3 以上の奇数段目は，すぐ下の段の円のすき間および右端と左端にはさまれるように N 個の円を詰める．

(iv) 長方形 R に詰め込めなくなるまで (ii), (iii) を繰り返す．その結果詰め込まれた円の総数を $V_B(M, N)$ とおく．

方法 A, B で円を詰め込んだとき，底から m 段目の円の最上部までの高さをそれぞれ $h_A(m)$, $h_B(m)$ とおく．次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とする．

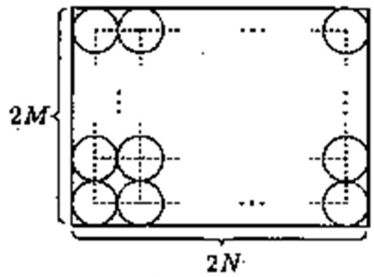


図1

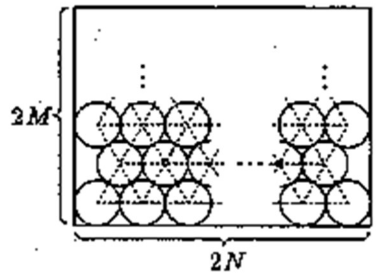


図2

(1) $h_B(m)$ を求めよ．

(2) $h_B(m+1) < h_A(m)$ を満たす m が存在するとき，その最小値 m_0 を求めよ．

(3) m_0 は (2) で求めたものとする．$V_A(m_0, N) < V_B(m_0, N)$ を満たす最小の N を求めよ．

(4) m_0 は (2) で求めたものとする．$V_A(M, N) < V_B(M, N)$ が m_0 以上のすべての M に対して成り立つような N の条件を求めよ．

解答

■ [I] (平面図形の計量) ┃難┃

[解答] (1) 隣り合った円の中心は1辺の長さが2の正三角形をなしているから，ひとつ上の段の円との中心の高さの差は $\sqrt{3}$ である．よって

$$h_B(m) = 1 + \sqrt{3}(m-1) + 1 = \sqrt{3}m + 2 - \sqrt{3}$$

《注》 $\sqrt{3} = 1.73$ を用いて，$h_B(m) = 1.73m + 0.27$ としてもよい．

(2) $h_A(m) = 2m$ だから

$$h_B(m+1) < h_A(m) \iff \sqrt{3}m + 2 < 2m$$
$$\iff m > 2(2+\sqrt{3})$$

$\sqrt{3} = 1.73$ より　$m > 7.46$ であり，これをみたす整数 m の最小値が m_0 だから，$m_0 = 8$

(3) (2) より　$h_B(m_0+1) < h_A(m_0) = 2m_0$

であり，

$h_B(m_0+2) - 2m_0 = 9\sqrt{3} + 2 - 16 = 15.57 - 14 > 0$

と合わせて $h_B(9) < 2m_0 < h_B(10)$ だから，B での m 段目までの円の総数を b_m とすると

$$V_B(m_0,\ N) = b_9 = 5N + 4(N-1) = 9N - 4$$

また，$V_A(m_0,\ N) = m_0N = 8N$ だから

$$V_A(m_0,\ N) < V_B(m_0,\ N) \iff 8N < 9N - 4$$
$$\iff N > 4$$

よって，これをみたす N の最小値は　$N = 5$

(4) $$b_m = \begin{cases} \dfrac{m+1}{2}N + \dfrac{m-1}{2}(N-1) & (m\text{: 奇数}) \\ \dfrac{m}{2}N + \dfrac{m}{2}(N-1) & (m\text{: 偶数}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} mN - \dfrac{m-1}{2} & (m\text{: 奇数}) \\ mN - \dfrac{m}{2} & (m\text{: 偶数}) \end{cases}$$

であり，$h_B(m) \leqq 2M$ をみたす最大の m に対して $V_B(M,\ N) = b_m$ となるから，次の表のようになる．

m	$h_B(m)$
9	15.84 (< 16)
10	17.57 (< 18)
11	19.3 (< 20)
12	21.03 (< 22)
13	22.76 (< 24)
14	24.49 (< 26)
15	26.22
16	27.95 (< 28)

M	$V_B(M,\ N)$	$V_B(M,\ N) - V_A(M,\ N)$
8	$b_9 = 9N - 4$	$N - 4$
9	$b_{10} = 10N - 5$	$N - 5$
10	$b_{11} = 11N - 5$	$N - 5$
11	$b_{12} = 12N - 6$	$N - 6$
12	$b_{13} = 13N - 6$	$N - 6$
13	$b_{14} = 14N - 7$	$N - 7$
14	$b_{16} = 16N - 8$	$2N - 8$

よって

「$M \geqq 8$ のとき $V_A(M,\ N) < V_B(M,\ N)$」 ……(*)

が成り立つためには

$V_B(M,\ N) - V_A(M,\ N) > 0$ $(M = 8,\ 9,\ \cdots,\ 14)$ ……①

より，$N - 7 > 0$，すなわち，$N \geqq 8$ が必要である．

この問題は

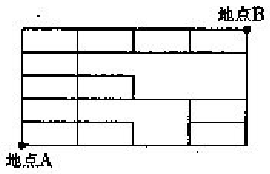
「直径 17mm のビー玉が 5×8=40 個入る箱(85mm×136mm)があります。

この箱の中に 41 個のビー玉を入れるにはどうしたらいいでしょう？　」

という問題（　http://www.straycats.net/html/news198.html　）の一般解です。

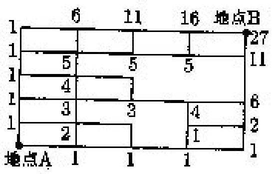
小樽商科大学　前期　商学部　　道順

1 (2) 右図において，地点 A から地点 B への最短経路の総数は $\boxed{}$



(2) $\boxed{\text{A}}$ (場合の数)

$\boxed{\text{解答}}$ 図の中に，各分岐地点までたどり着く経路の個数を書きこむと右のようになる．

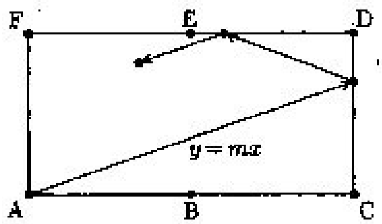


(各点に書かれた数は，その点の左および下に書かれた数の和である．ただし，どちらかがない場合は片方の数である．)

これから，地点 A から地点 B への最短経路の総数は **27** 通りである．

慶応大学　環境情報学部　　ビリヤードの反射

(3) 座標平面上に 6 点 A(0, 0), B(1, 0), C(2, 0), D(2, 1), E(1, 1), F(0, 1) がある．以下では長方形 ACDF をビリヤードの台と思い，点 A, B, C, D, E, F に穴があるとする．すると，点 A から x 軸に対して傾き $\dfrac{1}{3}$ で打ち出した球は $\boxed{(4)}$ 回縁で跳ね返り，$\boxed{(5)}$ の穴に入り，傾き $\dfrac{3}{7}$ で打ち出した球は $\boxed{(6)}$ 回縁で跳ね返り，$\boxed{(7)}$ の穴に入る．ここで，球は台の縁に衝突した角度（入射角）と同じ大きさの角度（反射角）で跳ね返り，つぎに衝突するまで直線運動を行うものとする．また，途中失速することはないものとする．



前ページの右図は x 軸に対して傾き m で A から打ち出した球の軌跡の一部を表している．

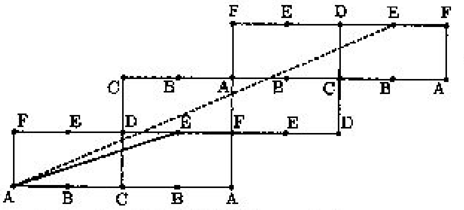
$\boxed{(5)}$, $\boxed{(7)}$ には下記の選択肢から適切な番号を選び記入しなさい．

[選択肢]　(1)　A　　(2)　B　　(3)　C　　(4)　D　　(5)　E　　(6)　F

解答

(3) Ⅱ (直線の方程式)

解答　球が長方形 ACDF の縁（辺）に達したとき，球を跳ね返らせるかわりに長方形 ACDF をその縁（辺）に関して対称移動することにすると，傾き $\frac{1}{3}$ で打ち出した球は下図の太実線の軌跡を描き，傾き $\frac{3}{7}$ で打ち出した球は下図の太破線の軌跡を描くことになる．



このようにした場合も跳ね返らせた場合と球が入る穴は同じであり，跳ね返りの回数は対称移動の回数に等しい．

よって，傾き $\frac{1}{3}$ で打ち出した球は 1 回縁で跳ね返り，E の穴に入り，傾き $\frac{3}{7}$ で打ち出した球は 5 回縁で跳ね返り，E の穴に入る．

立命館大学　経済学部　　複利計算

2 年利率 5%の複利で 1000 万円を貯金すると，n 年後の元利合計の金額は $1000\times(1+0.05)^n$ 万円になる．例えば，2011 年の始めに年利率 5%で 1000 万円を貯金すると，2012 年の年末には，元利合計の金額が $1000\times(1+0.05)^2$ 万円となる．下表の常用対数の値を用いて，以下の問いに答えよ．

x	2	3	5	7
$\log_{10}x$	0.301	0.477	0.699	0.845

(1) $\log_{10}1.05$ の値は □ である．

(2) 年利率 5%の複利で 1000 万円を貯金する場合，元利合計の金額がはじめて 2000 万円を越えるのは □ 年後である．

(3) 年利率 5%の複利で毎年の始めに 200 万円の積立預金をする．1 回目の積立を 2011 年の始めにする場合，年末における元利合計の金額がはじめて 3000 万円を越えるのは □ 年の終わりである．

解答

2 Ⅱ (常用対数)

解答 (1) $\log_{10}1.05=\log_{10}\frac{21}{20}$

$=\log_{10}3+\log_{10}7-(\log_{10}2+\log_{10}10)$

$=0.477+0.845-(0.301+1)$

$=\mathbf{0.021}$

(2) n 年後に 2000 万円を超えるとすると

$1000\times(1+0.05)^n>2000$

$\Longleftrightarrow 1.05^n>2$

$\Longleftrightarrow n\log_{10}1.05>\log_{10}2$

$\therefore\ n>\frac{\log_{10}2}{\log_{10}1.05}=\frac{0.301}{0.021}=14.33\cdots$

よって，はじめて超えるのは **15** 年後

(3) n 年後の元利合計は

$200\times1.05^n+200\times1.05^{n-1}+\cdots$

$+200\times1.05^2+200\times1.05$

$=200\cdot1.05\cdot\frac{1.05^n-1}{1.05-1}=4200(1.05^n-1)$ (万円)

だから，

$4200(1.05^n-1)>3000$

$\Longleftrightarrow 1.05^n>\frac{12}{7}$

$\Longleftrightarrow n\log_{10}1.05>\log_{10}12-\log_{10}7$

$\therefore\ n>\frac{2\cdot0.301+0.477-0.845}{0.021}=\frac{0.234}{0.021}$

$=11.14\cdots$

よって，はじめて 3000 万円を超えるのは

$2011+11=$ **2022** 年の終わり