２００６年度　小論文

三重大学 理工　ハノイの塔

4 図に示すように，台の上に３本の棒Ａ，Ｂ，Ｃが固定されている。そのうちの１本の棒Ａに，真ん中に穴のあいた８枚の円板が半径の大きいものから順に，はまっている。これらの円板すべてを，下記の①から③のルールに従って，棒Ｂに移すためには最小何回の操作が必要であるかを考えてみよう。ただし，ルールに従って円板を動かすことを，１回の操作として数えることにする。

ルール①円板を一度に１枚だけ動かすことができる。一度に複数の円板を動かしてはいけない。

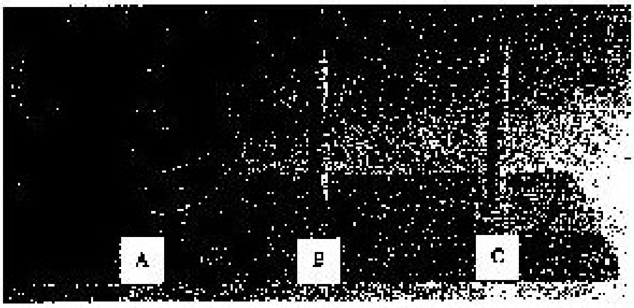
②円板をある棒から別の棒に動かすことしかできない。

③円板をその円板よりも半径の小さい円板の上に移してはいけない。

(1)　まず，円板が８枚ではなくて，１枚の場合，２枚の場合，３枚の場合を考えてみよう。これらの円板を棒Ｂにすべて移すのに要する操作回数が最小となる手順はそれぞれ一通りで，その操作回数は１回，３回，７回である。これらの手順を書きなさい。ただし，一番上の円板を棒Ａから棒Ｂに移す操作をＡ→Ｂと記せ。

(2)　つぎに，円板が４枚の場合を考えてみよう。これらの円板を棒Ｂにすべて移すのに要する最小の操作回数は，(1)の３枚の場合の最小操作回数を利用して簡単に求めることができる。その方法を文章で書きなさい。

(3)　円板が８枚の場合に，これらの円板を棒Ｂにすべて移すのに要する最小操作回数を求める過程と結果を示せ。



高知大　理学部　論証

数理情報科学＝＊[1]は必須，[2][3]はいずれか選択（各100点）

[1]次の文章をよく読んで，下の問いに答えよ。

すべての辺の長さとすべての頂点の内角が等しい多角形を正多角形という。さらに，辺の数が n のときには正 n 角形という。何種類かの正多角形のタイルで平面を張りつめる問題を，次の条件のもとで考えてみる。

（C1）張りつめたタイルの間にはすき間はなく，またタイル同士重なることはない。

（C2）どのタイルの辺の長さも同じである。

（C3）タイルの辺の両端を除いて，他のタイルの頂点がくることはない。

（C4）どの頂点においてもタイルの並び方は同じである。

まず，正 n 角形の一つの頂点の内角は，$\boxed{\text{①}}$ 度であることに注意する。このことと条件を用いれば，②一つの頂点を共有するタイルの数は３，４，５，６のいずれかであることがわかる。最初に，一つの頂点のまわりに３個のタイルが集まる場合を考える。３個のタイルを正 n 角形，正 m 角計，正 p 角形とする。このとき

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

が成立する。そこで $n\leqq m\leqq p$ とすると③ n のとりうる値は３，４，５，６のいずれかであることがわかる。この条件で(1)を $n=3$ として解くと，次の表１を得る。

n	3	3	3	3	3
m					
p					

表１

しかし，これらの組み合わせすべてについてタイル張りが存在するわけではない。

問１．①を求めよ。

問２．②を証明せよ。

問３．(1)を証明せよ。

問４．③を証明せよ。

問５．表１を完成させよ。

問６．表１と同様にして，$n=4$，$n=5$，$n=6$ の場合の表を完成させよ。

問７．$n=5$ のときには，(1)を満たす n，m，p（$n\leqq m\leqq p$）は存在するが，これに対応するタイル張りは存在しないことを説明せよ。

[2]次の文章をよく読んで，下の問いに答えよ。

a，b，c は正の実数とする。このとき

$$\frac{1}{2}(a+b),\qquad \sqrt{ab},\qquad 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$$

は，それぞれ二つの数 a，b の相加平均，相乗平均，調和平均と呼ばれている。このとき，これらの三つの平均の間には，関係式

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}\leqq\sqrt{ab}\leqq\frac{1}{2}(a+b)$$

が成り立つことがわかっている。①この左側の不等号は，右側の不等号が成り立つことを用いて示すことができる。

次に，三つの関係式

(i)　$a=\frac{1}{2}(b+c)$，　(ii)　$b=\sqrt{ac}$，　(iii)　$c=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$

が与えられたとき，(i)と(ii)が成り立つときには(iii)も成り立つ。このことは，次のようにしてわかる。まず，(i)の両辺に $2b$ を掛け，さらに(ii)の両辺を２乗するとそれぞれ

$$2ab=b^2+bc,\qquad b^2=ac$$

が得られる。これら二つの式から b^2 を消去した式を c に関して解けば，(iii)を得る。同様に，②(ii)と(iii)から(i)を導くことができる。また，(i)と(iii)から(ii)を導くこともできる。

最後に，(i)と(ii)が成り立つときには $a=b=c$ が成り立つことを示そう。まず，(i)と(ii)からはそれぞれ

$$b+c=2a,\qquad ac=b^2$$

が得られる。これら二つの式から c を消去すれば

$$0=2a^2-ab-b^2=(2a+b)(a-b)$$

が得られ，$2a+b>0$ より $a=b$ を得る。これと(i)により $a=b=c$ が示された。同様に，③(i)と(iii)から $a=b=c$ が得られる。そして，(ii)と(iii)からも $a=b=c$ が得られることがわかる。

問１．$\sqrt{ab}\leqq\frac{1}{2}(a+b)$ を証明せよ。

問２．①の方針にしたがって，$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}\leqq\sqrt{ab}$ を証明せよ。

問３．②を証明せよ。

問４．③を証明せよ。

福島大　理工　数列

共生システム理工＝次の資料（藤原正彦・小川洋子『世にも美しい数学入門』筑摩書房）を読み，問に答えよ。

小川　藤原先生は，どういうことがきっかけになって，数学に魅力を感じられたんですか。

藤原　やっぱり，解けたときの喜び，そして，解いたらほめられる喜びですね。小学校三年生のとき，父が「１から10まで足すと幾つか」って問題を出してくれたんです。順番に足して55って言っても，絶対にほめられないのはわかっている。僕はほめられることが何より好きな人間なので，一時間考えて，「１から９まで並べると真中に５がくるから，５×９＝45となる。それに残しておいた10を足して55だ」と答えたら，父が驚いて「すごい！」ってほめてくれた（図３〈１〉参照）。その後しばらくして，私は数学者になろうと思ったんです。

小川　先生の解き方というのは，ガウスが考えた三角数の考え方とは全然違うわけですか。

藤原　違うやり方です。

小川　どちらも，連続する自然数の和を求める方法なんですが，三角数とは関係ないやり方なんですね。だからお父様もすごく喜ばれた。

藤原　そうなんです。ガウスと同じやり方だったら，どこかで読んだんじゃないかと思われたかもしれないけれど，全然，違うやり方ですから。ガウスは１から100まで並べて，その下に逆に100から１まで並べて，縦に足すと全部101になるから，101を100倍して２で割った（図３〈２〉参照）。

図３　連続する自然数の和を求める方法

〈１〉藤原先生の小学校三年生のときの方法

$1+2+3+4+⑤+6+7+8+9 \} +10=$

↓１から９までの真中は５だから

$5\times 9=45$

↓先ほど10を残しておいたから

$45+10=55$

〈２〉ガウスの方法

$$\begin{array}{rl} & 1+2+3+4+5\cdots+100 \\ +) & 100+99+98+97+96\cdots+1 \\ \hline & 101+101+101+101+101\cdots+101 \\ & =101\times 100 \end{array}$$

１から100までを二回ずつ足しているから，

求めるものはその半分で$\dfrac{101\times 100}{2}$

↓したがって，１からnまでの自然数の和を求める公式は……

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

設問１　藤原氏（資料の中では，藤原先生と呼ばれている）の１から10までの足し算について，その計算方法を，式ではなく，言葉によって説明せよ（140字)。キーワードとして平均という言葉を使うこと。

設問２　藤原氏の方法を用いて，１から100までの足し算を，上記の設問のように，式ではなく，言葉によって説明せよ（120字）

設問３　藤原氏の方法とガウスの方法を比較検討せよ。長所，短所といった形で述べてもよい（240字）

設問４　藤原氏は，彼の父から，「１から10まで足すと幾つか」という問題を出され，自らの力によって解答した。一方，すでにガウスの方法が知られているように，書物あるいはインターネットなどで調べて，解答することも考えられる。あなたなら，どのような行動をとるか，論述せよ（500字）

大阪教育大学　後期　教育ー小学校（理数・生活系）円の面積

設問１

半径rの円の面積がπr^2であることを、定積分を学んだ高校３年生に対してと、小学校６年生に対してと、２通りに説明しなさい。

ただし、(円周の長さ）÷(直径の長さ）を円周率とよび、πで表すこととする。

和歌山大学　教育－学校教育（理科系）　魔方陣

問題１　右図の A～I に、1～9 までの数を必ず１回ずつどこかのマスに入れ、横・たて・斜めの３つの数の和（計 8 個ある）が、すべて等しくなるようにする。

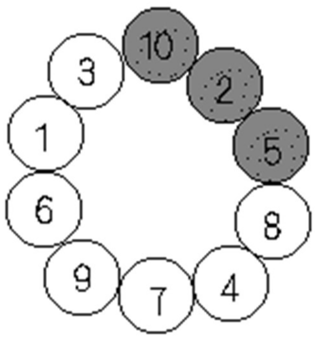
問　Ｅのマスに入る数は５であり、４隅のマスＡ・Ｃ・Ｇ・Ｉに入る数はすべて偶数、すなわち、２，４，６，８であること　を筋道をたてて述べよ。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

以下は、ある問題とその解答についての解説である。この問題の「解答」を、より理解しやすい文章で書き直せ。なお、以下の点に注意せよ。

・中学生が読んでもすぐに納得できるくらいの、わかりやすい文章で書くこと。
・読んだ人が疑問を持たないように、重要であると思われるポイントには、わかりやすい説明をつけること。
・1,000 字以内で書くこと。ただし、数式を使う場合には、その数式の部分は 1 文字を 1 升に入れる必要はなく、自由にます目を使って良い。
・図は使わずに書くこと。
・「題目」は記入しなくてよい。

問題　円周上に 1 から 10 までの自然数がランダムに並んでいます。このとき、円周上で隣り合う 3 つの数で、その合計が１７以上になるものが存在することを示して下さい。



たとえば、図のように数が並んでいたとしましょう。隣り合う３つの数の合計を書いてみると、次のようになります。

１０＋２＋５＝１７	２＋５＋８＝１５
５＋８＋４＝１７	８＋４＋７＝１９
４＋７＋９＝２０	７＋９＋６＝２２
９＋６＋１＝１６	６＋１＋３＝１０
１＋３＋１０＝１４	３＋１０＋２＝１５

たしかに、合計が１７以上になっているところがけっこうありますね。他の数でも試してください。きっと「合計が１７以上のものがある」という事実が見てそれとわかります。でも、どうしてなのかはわからない。こういうとき、私たちはよく「現象としてはわかる」と言います。

　では、どうしてこんな現象が起こるのでしょうか？実は「平均の考え方」を使おうとする態度があれば、その謎を解明するのは、そんなに難しくありません。

　そこで、円周上で隣り合う３つの数の合計の平均を求めてみましょう。そう言われても、３つの数の合計が具体的に与えられていなければ、平均を求めようがないではないかそう思う読者もいるかもしれませんね。平均の求め方をきちんと考えると、その平均が求まってしまうのです。

その平均の求め方とは、「すべてを足して、個数で割る」のことです。このことを踏まえれば、個々の合計の値はわからないけれど、その合計をすべて足した値はきちんと求まります。だって、１から１０までのどの数もそのすべてを足した式の中にちょうど3回ずつ登場しますよ。

ということは、足し算の順序を入れ替えてしまえば、総合計には１＋２＋・・・＋１０が３回繰り返されているということｄす。そして、円周上で隣り合う３つの数は全部で１０組あります。したがって、そういう３つの数の合計の平均は次の通りです。

平均が１６．５なのだから、それよりも大きい値になるものが必ず存在します。さらに、その値は整数なのだから、１７以上となるのでした。（根上生也、中本敦浩著「基礎数学学力トレーニング」日本評論社より）