

2007年度 (筑波大学、群馬大学、大阪教育大学、和歌山大学)

筑波大学・理工

③ $\alpha = 3 + \sqrt{5}$, $\beta = 3 - \sqrt{5}$ とおく。

問1 $\sqrt{5}$ が無理数であることを示せ。

問2 $\alpha^n + \beta^n$ ($n=1,2,3,\dots$)は常に偶数であることを示せ。

問3 $\beta < 0.77$ と $\beta^2 < 0.6$ を確かめよ。ただし、 $\sqrt{5} > 2.23$ であることを用いてもよい。

問4 n を整数とする。 $n \geq 3$ のとき、 α^n に最も近い整数は偶数であることを示せ。

群馬大学・教育

① 2次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $x=1, 2, 3$ でとる値の絶対値
 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$

の中で、少なくとも1つの値は $\frac{1}{2}$ よりも小さくないことを証明せよ。ただし、

a, b は定数である。

② 以下の設問に答えよ。

(1) 下の例にならって41を異なる2の累乗の和で表せ。

$$\text{例 } 5 = 1 + 2^2 \quad 7 = 1 + 2 + 2^2$$

(2) 19×13 の計算を次のように行った。

左図のようにまず1行に19と13を書く。

19	13	次に19を2で割った商9をその下に、さらに
9	26	9を2で割った商4をその下に書き、1になる
4	52	までこれをくり返す。
2	104	次に13を2倍して26をその下に、さらに
1	208	26を2倍して52をその下に書き、これをくり

返す。

このとき左の列で奇数をもった項に対応している右の列の項を合計すると

$13 + 26 + 208 = 247$ となってこれは 19×13 と一致する。

(i) 上と同様な方法で 37×17 の計算をせよ。

(ii) すべての自然数の掛け算も、上と同様な方法でもとまるが、その理由を説明せよ。

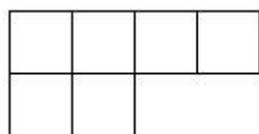
設問 1

面が全て合同な正多角形で、各頂点に集まる面の数がどこも同じである凸な立体を、正多面体とよぶ。正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5つしか存在しない。

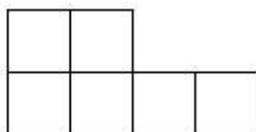
- (1) 5つの多面体について、それぞれの面の形、頂点の数、辺の数、面の数を調べ、表に示さない。
- (2) 5つの正多面体の見取り図を描きなさい。
- (3) 正多面体が5つしか存在しないことを論理的に説明しなさい。

- 1 同じ大きさの m 個と n 個の正方形の箱を、左端をそろえて上下二段に重ねることを (m, n) 枠と呼ぶとする。

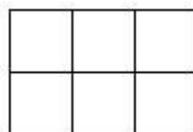
(m, n) 枠の例



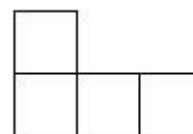
(4,2) 枠



(2,4) 枠



(3,3) 枠



(1,3) 枠



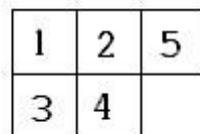
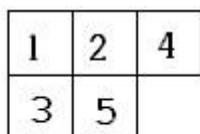
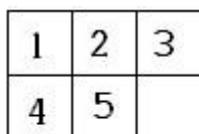
(1,1) 枠

(m, n) 枠を作る $m+n$ 個の箱に、1 から $m+n$ までの $m+n$ 個の数字を、

- (i) 横にならぶ左の箱の数は右のより大きい
- (ii) 縦にならぶ上の箱の数は下のものより大きい

ように書き入れたものを ($m+n$) 表と呼ぶ。

(3,2) 表の5種類



問1 (4, 3) 表は全部で何種類あるか。それらを全部書け。

問2 全ての(m, n)表 ($m \leq n$) の下段の右端の箱には $m + n$ が書き入れられていることを説明せよ。

問3 (4, 5)表は全部で何種類あるか。

問4 (m, n)表 ($m \leq n$) は全部で $\frac{(m+n)!(m-n+1)}{(m+n)!n!}$ 種類ある

ことを利用して、上段の箱の数が下段の箱の数よりも少ない場合 ($m < n$ のとき) に、(m, n) 表は全部で何種類あるか、説明せよ。