

くじ引きは公平か？

草薙浩二(東京)

k_kusanagi@ac.cyberhome.ne.jp

ある会で、夜間中学校で勤務される先生の確率の授業のプランのお話を伺い、作成してみました。

この夜間中学では、外国人の方と日本人の方の割合がおよそ8：2ということで、公立の高校への入学を目指して入学されるとのことです。はじめの1年間は日本語の学習で、次の1年間で教科の学習で、この2年間で卒業をされるそうです。だから普通の中学校で学習する3年分の9教科の学習を1年間で終わらせるということです。確率は、本来は9時間分の配当ですが、5時間で扱い毎回実験を行うプランでした。

なお、中学の確率は2年生で学習し、基本的には樹形図を描いて考えるものだと思いますが、現行の学習指導要領の該当部分を掲載します。

D(2)不確定な事象の起こりやすさ

(2) 不確定な事象の起こりやすさについて、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

ア 多数回の試行によって得られる確率と関連付けて、場合の数を基にして得られる確率の必要性と意味を理解すること。

イ 簡単な場合について確率を求めること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

ア 同様に確からしいことに着目し、場合の数を基にして得られる確率の求め方を考察し表現すること。

イ 確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現すること。

解説の部分は、

第1学年において、相対度数は、全体（総度数）に対する部分（各階級の度数）の割合を示す値で、各階級の頻度とみなされることや、多数の観察や多数回の試行の結果を基にして、不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現することなど

を学習している。第2学年では、これらの学習の上に立って、同様に確からしいことに着目し、確率を求める方法を考察するとともに、確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現することができるようにする。

場合の数を基にして得られる確率の必要性と意味（アのア）

第1学年において、多数の観察や多数回の試行の結果を基にして確率を学習している。しかし、身の回りにはこれらを基にせずとも、場合の数を基にして確率を求めることができる事象が数多くある。

例えば、さいころを振る場合、その目の出方には6通りあり、どの目が出ることも同様に確からしいとすると、場合の数を基にして得られる確率は $1/6$ であることが分かる。実際にさいころを多数回振ると、それぞれの目が出る回数の割合はどの

目についても $1/6$ に安定する傾向が見られる。このように、起こり得るどの場合も同様に確からしいとき、多数回の試行によって得られる確率は、試行回数を増やすにつれて、場合の数を基にして得られる確率に近づくことが知られている（大数の法則）。

確率を求めるには、実際に多数回の試行をするよりも、場合の数に基づいて考えた方が、時間も労力も節約できる。しかし、その反面、不確定な事象について何が分かるのかという確率本来の意味が見失われてしまいやすい。例えば、「さいころを振って1の目が出る確率が $1/6$ である」ことから、「さいころを6回投げると、そのうち1回は1の目が必ず出る」と考えてしまうのは、確率の意味の理解が不十分であることが原因であると考えられる。

指導に当たっては、実際に多数回の試行によって得られた確率と場合の数を基にして求めた確率とを関連付けて、求めた確率を実感を伴って理解できるようにする。

簡単な場合について確率を求めること（アのイ、イのア）

起こり得る場合の数を基にして確率を求めるには、同様に確からしいと考えられる起こり得る場合全てを正しく求める必要がある。ここでは小学校第6学年における指導を踏まえ、起こり得る場合を順序よく整理し、落ちや重なりがないように数

え上げる。その際、樹形図や二次元の表などを利用して、起こり得る全ての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げる。

簡単な場合の例として、2個の硬貨を投げたときの表と裏の出方がある。2個の硬貨の表と裏の出方の全ての場合（表、表）、（表、裏）、（裏、表）、（裏、裏）の4通りであり、どの場合が起こることも同様に確からしい

と考えられる。このうち、

2個とも表になる場合は、同様に確からしい4通りの場合のうちの一つであるから、その確率は $1/4$ になる。このとき、「確率が $1/4$ である」とは、先にも述べたように2個の硬貨を4回投げると、そのうちの1回は必ず二つとも表が出るという確定的なことを意味するものではないことに注意する必要がある。

また、上の事例では、表と裏の出方の全ての場合が(表, 表), (表, 裏), (裏, 裏)の3通りであると考え、2個とも表になる確率は $1/3$ であると考え誤りが起こりやすい。この場合、同様に確からしいことに着目し、起こり得る場合を落ちや重なりがないように数え上げられるようにするとともに、実際に多数回の試行をしてその結果と比較し、実感を伴って理解できるようにする。

指導に当たっては、同様に確からしいことに着目し、樹形図や二次元の表などの数学的な表現を用いて説明し伝え合うことを通して、場合の数を基にして得られる確率の求め方を考察し表現できるようにすることが大切である。

確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現すること(イのイ)

第1学年では、多数の観察や多数回の試行の結果を基にして、不確定な事象の起こりやすさを読み取り表現することについて学習した。ここでは、場合の数を基にして得られる確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現することについて学習する。

指導に当たっては、確率を求めることだけを目的とするのではなく、不確定な事象に関する問題解決を重視し、生徒が確率を用いて説明することを大切にする。その際、日常生活や社会に関わる事象を取り上げ、確率を用いて説明できる事柄を明らかにすることが必要である。

例えば、くじ引きをするとき、何番目に引くかで当たりやすさに違いがあるかどうか、つまりくじ引きが公平であるかどうかについて、その理由を確率に基づいて説明することが考えられる。この場合、くじ引きのルールを明確にすることの重要性や、ルールを変更すると判断も変わることがあることに気付くように指導することも大切である。

確率を用いて不確定な事象を捉え説明することを通して、「必ず～になる」とは言い切れない事柄についても、数を用いて考えたり判断したりすることができることを理解し、数学と日常生活や社会との関係を実感できるようにする。

とあり、数学的活動として、次の記述があります。

○くじ引きが公平である理由を、確率を用いて説明する活動

この活動は、第2学年「Dデータの活用」の(2)のイのイ「確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現すること」の指導における数学的活動である。ここでのねらいは、例えば「くじ引きをするとき、先に引くか、後に引くか、どちらでもよいか」

について判断を求め、その理由について確率を用いて説明することとする。またその過程において、求めた確率に基づいてどのような判断ができるのかを知り、不確定な事象の考察に生かせるようにする。

この活動に生徒が主体的・対話的に取り組むことができるようにし、深い学びの実現につなげるのが大切である。そのために、多数回の試行をしたり、起こり得る場合の数を求めたりして簡単な場合について確率を求めることができるよう指導とその計画を工夫する。

こうした指導を踏まえ、くじ引きが公平であるかどうかを説明する活動に取り組む機会を設ける。まず、くじを引く順序によって当たりやすさに違いがあるかどうかについて「先に引いた方が当たりやすい」、「後から引いた方が当たりやすい」、「ど

ちらも同じ」など直観的に予想を立てる。その上で、例えば「5本のうち2本の当たりくじが入っているくじを2人の生徒が引くとき、引く順番によって当たりやすさに違いがあるか」と問題を焦点化する。実際に何回かくじ引きを行うなどして試

行の結果からも予想を立てておくようにするとよい。次に、予想が正しいかどうかを調べるために、樹形図などを作って起こり得る場合の数を求め、先に引いた場合と後から引いた場合で当たる確率をそれぞれ計算する。この場合、どちらの確率も $2/5$

となり、確率が等しいことから「引く順序によって当たりやすさに違いがない」と判断し、くじ引きが公平である理由を説明する。その際、各自の説明を他者のものと比較し、不十分な点を指摘し合うなどして、協働的に表現を洗練することが考えられる。確率を求めることができても説明することができない生徒には、確率の意味を見直すように促す。

また、焦点化された問題について、「問題の条件を変えても当たりやすさに違いはないか」と発展的に考え、新たな問題を見いだすことができる。例えば「4本のうち2本の当たりくじが入っているくじを3人の生徒で引

くとき、何番目に引いても確率は1/2になるか」など、くじの総数や当たりくじの本数、人数を変えてもくじ引きが公平であるかどうかについて、生徒の疑問に従って自立的に説明し、レポートにまとめ発表する機会を設けることも考えられる。

そんなことで、「くじ引きは公平か」を書いてみました。これは、引いたくじを元に戻しても戻さなくても、くじ引きはくじを引く立場から公平だ、ということと、くじ引きを主催する「胴元」にとっても公平だということ扱いたかったものです。中学生以上の方を対象としました。仮説実験授業のミニ授業書を意識してまとめました。

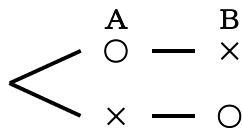
プリント1

お話し1 : 物事を決めるのに「くじ引き」を使うことがありますね。そういうときに、最初に引いた方がいいから、くじを引く順番を決めるくじ引きをしようということを出したりするような人がいるとかいないとか、今日は、そんなくじ引きについて考えましょう。

問題1 : A, Bの二人でくじ引きをします。最初にAがくじをひいて、次に残ったくじをBがひくことにします。

くじは2本で1本は当たりの場合を考えると、Aが1本ひいたとき、Aが当たればBのハズレが分かり、逆にAが外れたときはBは当たりです。だから、この場合は、二人の当たる確率は同じで $\frac{1}{2}$ です。

このことは、下図の様な図を描くと分かりますね。こういう図を樹形図といいます。



では、くじが3本あって、1本が当たりの場合は、二人の当たる確率はどうでしょうか。

- 選択肢
- ア) 二人とも同じ
 - イ) Aの方が確率は大きい。
 - ウ) Bの方が確率は大きい。
 - エ) その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。

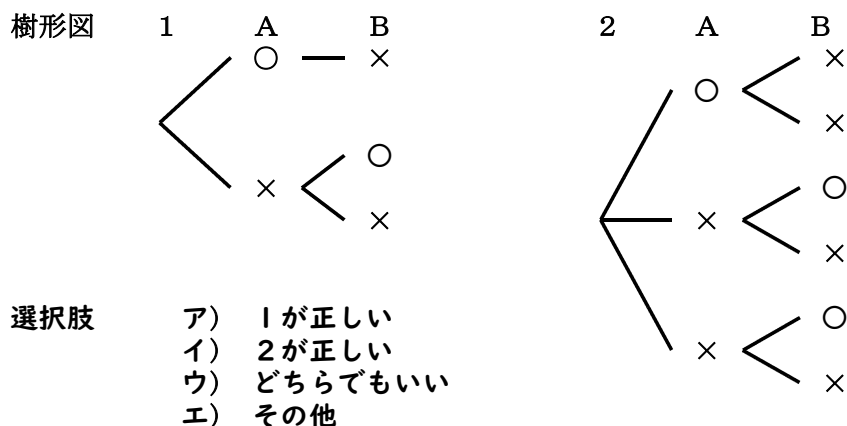
自分の答え:

意見を交換して……

実験で確認しましょう。

プリント 2

問題 2 : くじが 3 本で 1 本が当たりの場合、実験をしてみたら、【ア)の二人とも同じ】 のようです。では、樹形図を描いたとき、どちらの樹形図が正しいのでしょうか。



予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。
 自分の答え：
 意見を交換して……

プリント 3

作業 1 : くじが 3 本でくじ引きを行った場合について実験を行い、樹形図を描いて考え、くじ引きは 2 人にとって平等であることが分かりました。では、くじの本数を増やして、くじが 4 本(そのうち当たりくじは 1 本)の場合は、やはり、公平なのかどうかを樹形図を描いて調べましょう。

プリント 4

問題 3 : くじが 4 本(そのうち当たりくじは 1 本)でくじ引きを行った場合、くじ引きは 2 人にとって平等であることが分かりました。では、くじの本数は同じで、当たりくじを 2 本にしたらどうでしょうか。

選択肢 ア) くじ引きは二人にとって公平である
 イ) くじ引きは二人にとって公平ではない
 ウ) その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。
 自分の答え：
 意見を交換して……

プリント5

作業2 : くじが4本(そのうち当たりくじは2本)の場合は、やはり、公平なのかどうかを樹形図を描いて調べましょう。

プリント6

お話し2 : いろいろ調べてきましたが、実は、二人にとってくじ引きは、くじの本数に関係なく、平等です。だから、安心して、くじ引きが出来るのです。
でも、二人の場合について考えて来たので、くじを引く人の数が増えたらどうでしょうか。そういうことを考えてみましょう。

問題4 : くじ引きで、くじの本数に関係なく、AとBが引くくじの当たる確率は同じになります。つまり、くじ引きでは、くじを引く順番が1番でも2番でも同じになります。
では、3番目にCがくじをひいたらどうでしょうか。くじの本数は3本で、当たりくじは1本とします。

- 選択肢 ア) 三人とも平等であり、確率は同じ
イ) Aの確率が一番大きい
ウ) Bの確率が一番大きい
ウ) Cの確率が一番大きい
エ) その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。
自分の答え：
意見を交換して・・・
樹形図を描いて考えましょう

プリント7

問題5 : 3本のくじ引き(そのうち当たりは1本)で、最初にAがくじを引いて、次にBが引いて、残りをCが引くとしたとき、くじ引きは三人にとって公平でした。
では、くじの本数を増やして、4本のくじ(そのうち当たりくじは1本)の場合はどうでしょうか。

- 選択肢 ア) 三人とも平等であり、確率は同じ
イ) Aの確率が一番大きい
ウ) Bの確率が一番大きい
ウ) Cの確率が一番大きい
エ) その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。
自分の答え：
意見を交換して・・・
樹形図を描いて考えましょう

プリント 8

お話し 3 : A, B, Cの3人でくじ引きを行うとき、くじが4本(そのうち当たりくじが1本)の場合について、樹形図を描いて考え、三人にとって、くじ引きが公平なのを明らかにしました。実は、くじ引きでは、くじを引く人数が何人でも、くじの本数が何本でも、公平ということがいえます。
でも、これまでは、くじ引きでくじを引いたら、引いたくじは元に戻さない場合についての場合でした。くじを元に戻したら、どうなるでしょうか。

問題 6 : くじ引きをA, Bの二人で行う場合を考えます。まず、最初にAがくじを引いて、そのくじを確認したらそのくじを戻して、次にBがくじを引きます。くじは3本(そのうち当たりくじは1本)のとき、二人にとって、くじ引きは公平でしょうか。

- 選択肢 ア) 二人にとって公平である
イ) 二人にとって公平ではない
ウ) その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。

自分の答え:

意見を交換して...

樹形図を描いて考えましょう

プリント 9

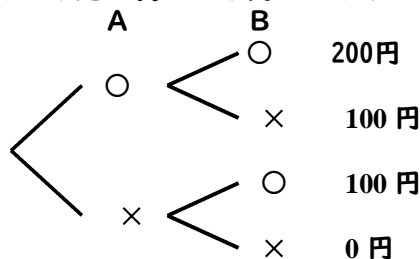
お話し4 : 引いたくじを元に戻してから次のくじを引く場合、くじの中味は最初と同じ状態になるので、二人の当たりくじを引く確率は同じだから、平等なのは一目瞭然ですね。このことは、くじの本数が増えても、くじを引く人が増えても同じです。

では、引いたくじを元に戻さない場合と元に戻す場合では、何か違いがあるのでしょうか。くじを引く立場では、変わりはありません。

しかし、くじ引きを主催する方にとっては、大きな違いがあります。引いたくじを元に戻さない場合は、当たりくじの本数までしか当たりくじは出てこないの、景品などがある場合などでは、用意すべき景品の数が明かです。でも、引いたくじを元に戻す場合は、常にくじの中味は同じだから、くじを引いた人全てが当たることもあり得ます。すると、商品などを用意する場合、いくつ用意しなければいけないのかが問題です。

ところで、くじが 10 本あって、1 等が 1 本で 1000 円、2 等が 2 本で 500 円の賞金とします。このくじを 1 本引いたとき、もらえる賞金の平均を考えたいとき、10 本全部くじを引いたとしたら、賞金は $1000 \text{ 円} \times 1 + 500 \text{ 円} \times 2 = 2000 \text{ 円}$ ですが、これは 10 本全部の賞金だから、それを 10 で割って、 $2000 \text{ 円} \div 10 \text{ 本} = 200 \text{ 円/本}$ となるので、何回もくじを引いてみたら、平均して 200 円の賞金がもらえると考えることが出来ます。

問題7 : 二人で 2 本のくじ(そのうち当たりくじは 1 本で当りは 100 円)を引く場合、引いたくじを元に戻さない場合ときは、必ず当たるから、必ず 100 円を賞金としてくじの主催者は払います。引いたくじを元に戻すときは、樹形図を描くと下図になるので、二人とも当たる(200 円を支払う)場合は 1 通り、1 人だけ当たる(100 円を支払う)場合は 2 通りなので、 $200 \text{ 円} \times 1 + 100 \text{ 円} \times 2 = 400 \text{ 円}$ で、4 で割って、 $400 \text{ 円} \div 4 = 100 \text{ 円}$ となり、引いたくじを元に戻さなくても元に戻しても同じになります。



では、二人で 3 本のくじ(そのうち当たりくじは 1 本で 100 円の賞金)の場合、引いたくじを元に戻さないときと元に戻すときでは、同じでしょうか。

- 選択肢 ア)同じ
イ)異なる
ウ)その他

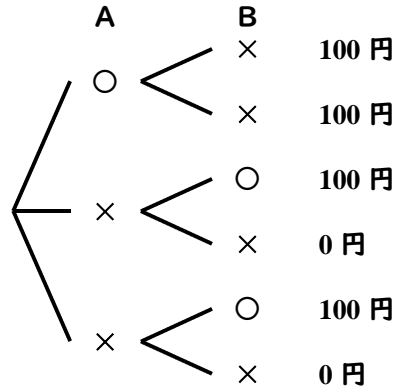
予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。

自分の答え：
意見を交換して…

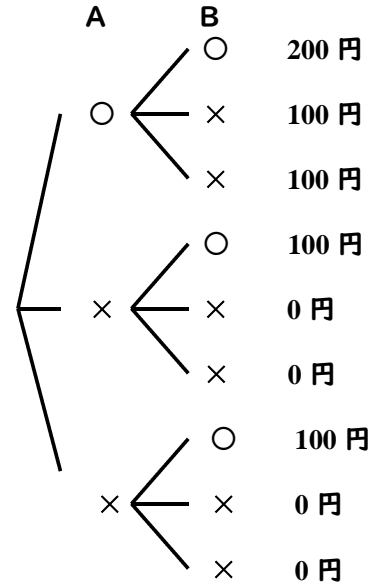
プリント10

問題8 : 引いたくじを元に戻さないときは、樹形図を描いて考えると、くじの引き方は6通りあって、そのうち当たる(支払うのは100円)のは4通りだから、 $100円 \times 4 = 400円$ で、6で割って $400円 \div 6$ で、 $66.66\cdots円$ で、整数の範囲で四捨五入すると、67円になります。

引いたくじを元に戻さないとき



引いたくじを元に戻すとき



引いたくじを元に戻すときは、くじの引き方は9通りで、二人当たるの(支払うのは200円)は1通り、1人だけ当たるの(支払うのは100円)は4通りなので、 $200円 \times 1 + 100円 \times 4 = 600円$ で、9割って、 $600円 \div 9$ で、 $66.66\cdots円$ で、四捨五入して整数にすると、67円となり、同じになります。

では、二人で4本のくじ(そのうち当たりくじは1本で100円の賞金)の場合は、どうでしょうか

- 選択肢 ア)同じ
イ)異なる
ウ)その他

予想を出して、自分の考えや人の考えを交換しましょう。

自分の答え：
意見を交換して…

プリントII

お話し5 : 二人で4本のくじ(そのうち当たりくじは1本で100円の賞金)の場合も樹形図を描いて考えることが出来ますね。ここでは省略させていただきます。

引いたくじを元に戻さないときは、くじの引き方は 4×3 の12通りあり、そのうち当たりくじを引く(100円を支払う)のは6通りあり、 $100円 \times 6 = 600円$ で、12で割って、 $600円 \div 12 = 50円$ になります。

引いたくじを元に戻すときは、くじの引き方は 4×4 の16通りあり、二人が当たる(200円を支払う)のは1通りで、一人が当たる(支払うのは100円)のは6通りだから、 $200円 \times 1 + 100円 \times 6 = 800円$ で、16で割って、 $800円 \div 16 = 50円$ になります。

つまり、引いたくじを元に戻すときも戻さないときも同じで、くじを主催する人(胴元)にもどちらでも同じだということが分かりました。

実は、くじの本数を増やしても、また、くじを引く人数を増やしても、くじを主催する人(胴元)にとっても、引いたくじを元に戻さなくても、戻しても、平均すると同じになります。

くじ引きの公平性は、くじを引く人にとっても、くじを主催する人にとっても、公平なのですが、くじを元に戻す場合は、全員が当たることもあり得るので、その点では不利なのかも知れません。その反面、誰も当たりを引かない場合も多くなるので、難しいところですね。

ここでは、樹形図を描いて考えることで解決をしようとしているので、くじの本数を増やしたりくじを引く人数を多くしたりはしませんでした。こういうことは、高校数学を学習すると出来る様になり、無限に増やして考えることも出来るようになります。それを楽しみに待ちましょう。