表紙

2024.6.28(金)

西三サークル第 8 回オンライン例会■「ピタゴラスの定理の新証明 2024」うさみ

ファイルネーム「ピタゴラスの定理の新証明 2024」は冗談半分です.

1 ページ目 ピタゴラスの定理の新証明 (2023) の概要

は,

American Mathematical Society(アメリカ数学会、AMS) に対してルイジアナ州ニューオリンズ出身の 10 代の少女であるカルシア・ジョンソン氏とネキヤ・ジャクソン氏の 2 人がプレゼンを行い、ピタゴラスの定理の新しい証明を示しました。

について言及しています.

「証明」は証明になってはいますが，倍角を用いることにどれほどの必然性があったのか. 私としては疑問です.

2 ページ目 ピタゴラスの定理の新証明 (2023) の二番煎じ?

は,

sin の倍角を知るためなら，級数の収束によらずともできることで，証明を簡略化できることを示した．それは二番煎じでしょうか？

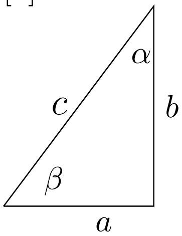
3 ページ目 「直角三角形の倍角定理」とその証明

あと，付録として,「異なる長さの単位の統合」だけで，ピタゴラスの定理を証明できることをみせる.

ピタゴラスの定理の新証明(2023) の概要

新証明の肝は，倍角の $\sin 2\alpha$ の二様の表現を求めることです．

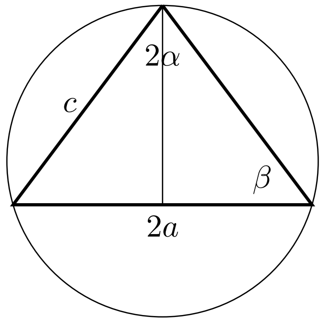
[1]



直角三角形 $(\alpha+\beta=\pi/2)$ では，

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \cdots (1)$$

です．



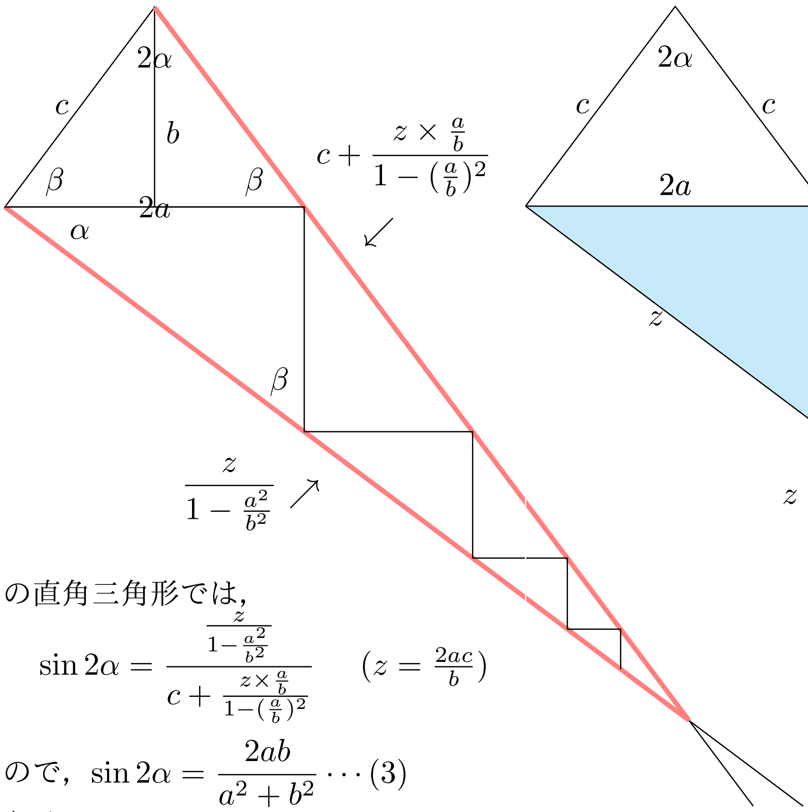
倍角 2α を持つこの三角形では, 正弦定理により,

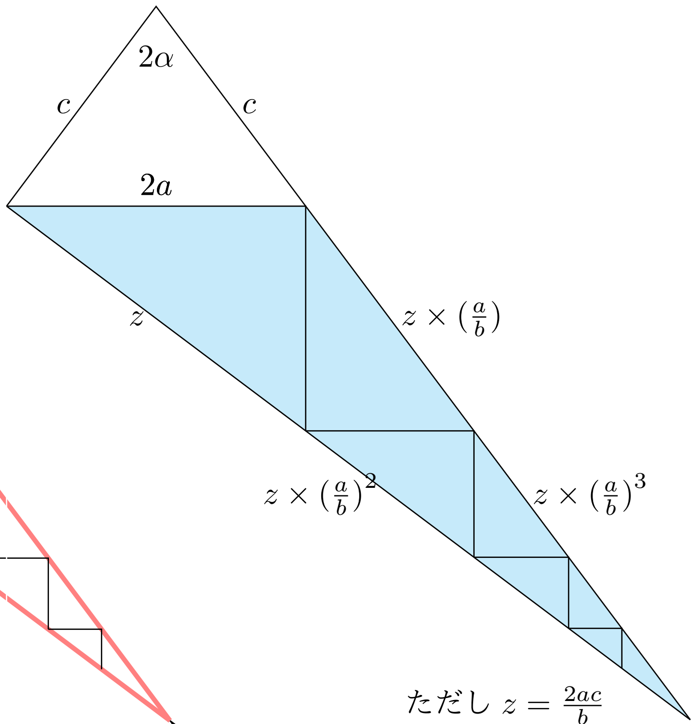
$$\frac{2a}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin\beta} \cdots (2)$$

です．

2α の二等辺三角形を作ります (↗).

[2] その二等辺三角形の一辺 c で垂線 $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2})$ をたて，もう一辺 c を延長して，倍角 2α を持つ直角三角形を作ります．新しい直角三角形の付加部分は，項比が (a/b) の，3 辺の比が $a:b:c$ の相似三角形で満たされて，いるので，新しい三角形の c 以外の 2 辺は，等比数列の和を利用して求まります．





ただし $z = \frac{2ac}{b}$

この直角三角形では,

$$\sin 2\alpha = \frac{\frac{z}{1-\frac{a^2}{b^2}}}{c + \frac{z \times \frac{a}{b}}{1-(\frac{a}{b})^2}} \qquad (z = \frac{2ac}{b})$$

なので，$\sin 2\alpha = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \cdots (3)$
をえる．

[3] (2) に (1)(3) を適用して整理すると，$a^2+b^2=c^2$ となる．

問題点

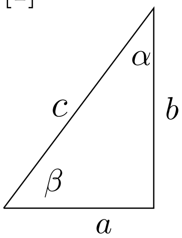
[1] 「三角法」を使うのは循環論法の恐れありとか．「三角法」という言葉の定義こそ問題点

[2] 「等比級数の収束」という道具立ては必要なのか．倍角の発想はどこから？

ピタゴラスの定理の新証明 (2023) の二番煎じ?

新証明の肝は，倍角の $\sin 2\alpha$ の二様の表現を求めることです．

[1]

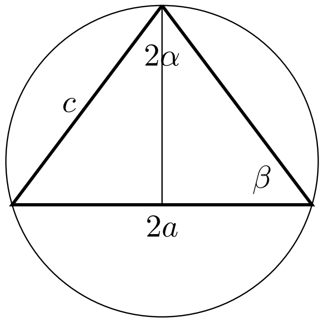


直角三角形 $(\alpha+\beta=\pi/2)$ では，

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\cdots(1)$$

です．

2α の二等辺三角形を作ります (↗).

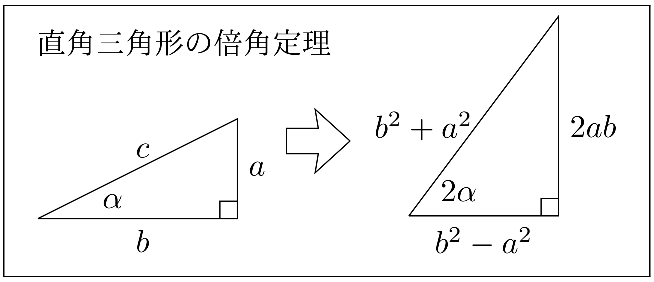


倍角 2α を持つこの三角形では，正弦定理により，

$$\frac{2a}{\sin 2\alpha}=\frac{c}{\sin\beta}\cdots(2)$$

です．

[2]



より

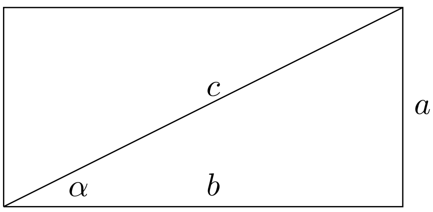
$$\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}\cdots(3)$$

[3] (2) に (1)(3) を適用して整理すると，$a^2+b^2=c^2$ となる．

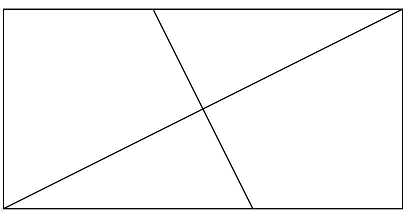
「直角三角形の倍角定理」を，直角三角形の半角/倍角の関係を長方形で考える

実際に，長方形を折ることを試みてください．

底辺 b，高さ a の長方形で対角線の長さを c とする．

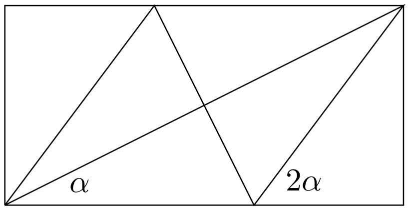


この長方形に，対角線とその垂直二等分線を入れる．



さらに，垂直二等分線の端点と，長方形の頂点を結ぶと，菱形ができる．

これによって，2α がみえるようになる．



このとき，右端にある，2α の直角三角形の辺の比は，

底辺：垂辺：斜辺

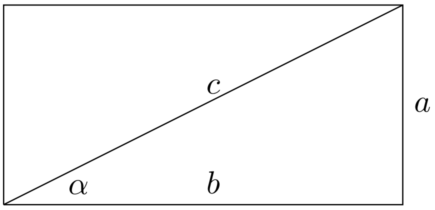
$=a^2-b^2:2ab:a^2+b^2$

となる．

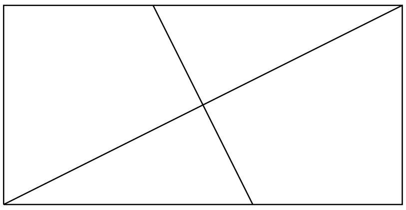
補足 詳細

「直角三角形の倍角定理」とその証明

底辺 b，高さ a の長方形で対角線の長さを c とする．

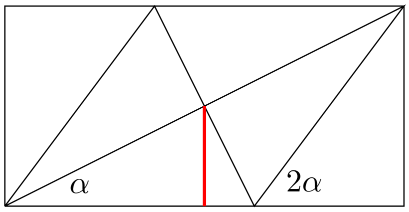


この長方形に，対角線とその垂直二等分線を入れる．



さらに，垂直二等分線の端点と，長方形の頂点を結ぶと，菱形ができる．

これによって，2α がみえるようになる．



このとき，右端にある，2α の直角三角形の辺の比は，

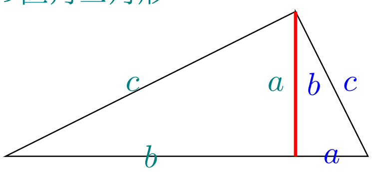
底辺：垂辺：斜辺

$=a^2-b^2 : 2ab : a^2+b^2$

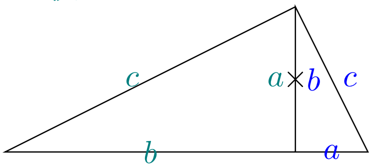
となる．

証明は，長方形の中心から下辺に垂線を下ろすことから始める．

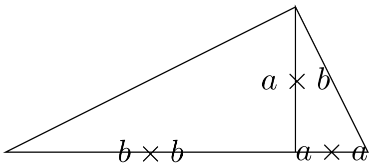
辺の比が $a:b:c$ の直角三角形



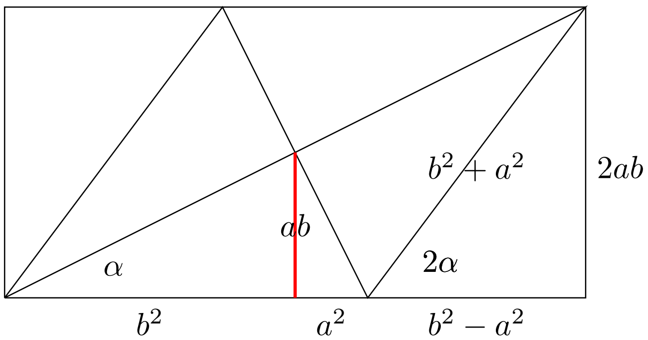
共通の高さを $a\times b$ と決める



辺の長さを確定する



その結果を適用する



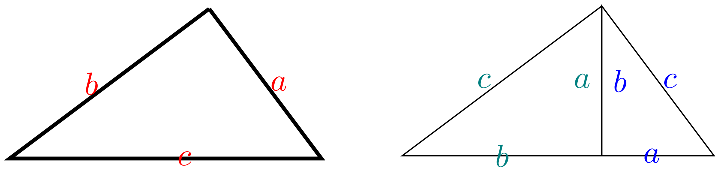
補足 終わり

この単純な証明はいかが？

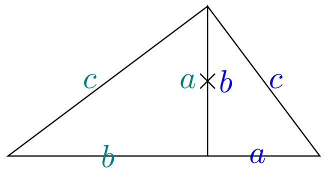
新説

ピタゴラスの定理の新証明2024

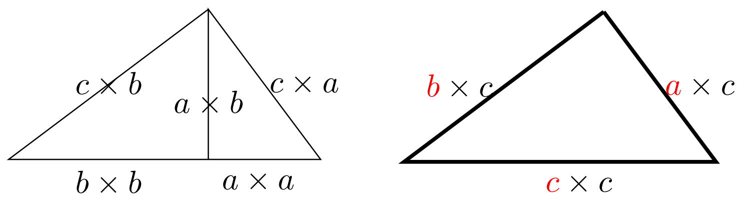
辺の比が $a : b : c$ の直角三角形の直角の頂点から垂線を下ろします．分割された二つの直角三角形のいずれも，辺の比が $a : b : c$ の直角三角形です．



長さの単位を同じくするために，共通の高さを $a \times b$ と決めます．



その他の辺の長さを確定します．その結果をもとの三角形にも反映させます．



下辺を比較すれば $a^2 + b^2 = c^2$ をえられます．

この証明は初めての公表ではありません．だから，「ピタゴラスの定理の新証明 2024」というのは，嘘です．

さらに，この証明と同値な，数学っぽい証明はすでに大昔にあります．

というわけで，新証明でもなんでもありません．

ここでは，単なる比例のこととして，

長さの単位を同じくするために，共通の高さを $a \times b$ と決めます．

を原理としています．