演習問題の背景　　　　　　　　（山田）

［数研出版・4プロセス数学Ｂ　問題97］

n は自然数とする。自然数 a，b を用いて，$(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}$ と表されることを，数学的帰納法によって証明せよ。（解答略）

$\boxed{\text{実験}}$

$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$　　　$\dfrac{3}{2}=1.5$

$(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$　　　$\dfrac{17}{12}=$　$\underline{1.41}6\cdots$

$(17+12\sqrt{2})^2=577+408\sqrt{2}$　　　$\dfrac{577}{408}=$　$\underline{1.41421}5\cdots$

$(577+408\sqrt{2})^2=665857+470832\sqrt{2}$　　　$\dfrac{665857}{470832}=$　$\underline{1.41421356237}4\cdots$

$\boxed{\text{解説}}$

ペル方程式　$x^2-2y^2=1$ …①　　の最小解を $(x,y)=(x_1,y_1)$　とする。

$x_1^2-2y_1^2=1$

$(x_1+\sqrt{2}\,y_1)(x_1-\sqrt{2}\,y_1)=1$

$(x_1+\sqrt{2}\,y_1)^n(x_1-\sqrt{2}\,y_1)^n=1^n$

ここで

$(x_1+\sqrt{2}\,y_1)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$　　とすれば $(x_1-\sqrt{2}\,y_1)^n=x_n-y_n\sqrt{2}$ より

$(x_n+\sqrt{2}\,y_n)(x_n-\sqrt{2}\,y_n)=1$

$x_n^2-2y_n^2=1$

よって　$(x,y)=(x_n,y_n)$　も①の解で、順次 $\sqrt{2}$ の近似になる。

なお、上記の$\boxed{\text{実験}}$では

$(x_1,y_1)=(3,2)$　$(x_2,y_2)=(17,12)$　$(x_4,y_4)=(577,408)$　$(x_8,y_8)=(66587,470832)$

と、n は 2^k で変化するが、その場合、

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k^2+2y_k^2 \\ y_{k+1}=2x_ky_k \end{cases}\quad \text{より}\quad \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}=\frac{x_k^2+2y_k^2}{2x_ky_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{y_k}+2\frac{y_k}{x_k}\right)$$

$\dfrac{x_k}{y_k}=t_k$　として　$t_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(t_k+\dfrac{2}{t_k}\right)$　　これは　Newton法と一致する。

実際、$t_0=2$ とすると $t_1,t_2,t_3\cdots=\dfrac{3}{2},\dfrac{17}{12},\dfrac{577}{408}\cdots$

$\sqrt{D}$　の場合も同様で、$(x_k+y_k\sqrt{D})^2=x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{D}$　から得られる t_kの漸化式 は

Newton法　$t_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(t_k+\dfrac{D}{t_k}\right)$　と一致する。

「ヘイスティングズの戦い」の問題　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　山田

「問題　：かつてのイングランド王ハロルド 2 世の軍は古来からの慣わしで、同じ大きさの 13 個の正方形をなすように編成されていた。その後ハロルド 2 世自身が『ヘイスティングズの戦い』の戦場に現れると、兵士たちはその王を頂点に一つの巨大な正方形をなして突撃したという。
では、ハロルド 2 世の軍は何人だったのだろうか。」
「私はこの問題を、ノイキルヒの『代数的整数論』（非常に有名な整数論の教科書）で知りました。この本の演習問題の一つとして上の内容が載っているのですが、普通の数学の問題が並ぶ中、明らかにこれだけ異様なオーラを放っています（笑）。というのも、この本の原文にはもっとメッセージ性の強い語調で上の問題が記されています。今回、私は皆さんに伝わりやすいように多少文章を簡単にしていますが、なかなか数学の問題に個人の感情をのせることはないと思うので是非興味のある方は調べてみてください」。（以上、「ラスクの Mathematics for Everyone！(https://mathforeveryone.hatenablog.com)　」から抜粋

……ペル方程式の文章問題がどこかにないか探していたら、上記の記述があった。
とても気になったので探したところ、ノイキルヒ『代数的整数論』の原書の全ページがネット公開されており、問題の箇所を見つけた。以下の通り。

Jiirgen Neukirch　“Algebraic Number Theory”　P44

Exercise 3. The Battle of Hastings (October 14, 1066).
“The men of Harold stood well together, as their wont was, and formed thirteen squares, with a like number of men in every square thereof, and woe to the hardy Norman who ventured to enter their redoubts; for a single blow of a Saxon war-hatched would break his lance and cut through his coat of mail... When Harold threw himself into the fray the Saxons were one mighty square of men, shouting the battle-cries, ‘Ut!’, ‘Olicrosse!’, ‘Godemite!’.” [Fictitious historical text, following essentially problem no. 129 in: H.E. Dundeney, *Amusements in Mathematics*, 1917 (Dover reprints 1958 and 1970).]
Question. How many troops does this suggest Harold II had at the battle of Hastings?

…… 以下の解答は同じ「ラスクの Mathematics for Everyone！」から抜粋。

問題の兵数を求めるには、

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

を解けばよいのでした。そのために(I)$\sqrt{13}$の連分数展開を求めます。

$\sqrt{13}=[3;(1,1,1,1,6)]$。(Ⅱ)これから$\sqrt{D}$の近似分数を求めると

$$[3;1,1,1,1]=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{18}{5}$$

今、周期が5で奇数なことから

$x^2-13y^2=-1$の最小解は$(x_1,y_1)=(18,5)$

$x^2-13y^2=1$の最小解は$(x_2,y_2)=(649,180)$

となります。数学的には(x_4,y_4)や(x_6,y_6)なども解になりますが兵数を考えていること

を思い出すと、現実的な数字ではないので、最小解(x_2,y_2)のみ考えることにします。

そうすると、答えであるハロルド2世の軍の兵数が$649^2-1=421200$(人)

と求まりました！！

……この問題の紹介が、以下の”MATH’S FUN”というサイトにも載っていた。有名なサム・ロイドの名前を冠した問題になっている。

Search

MATH IS FUN

Link Here

Measuring Puzzles | Starter Puzzles | Puzzle Games | Logic Puzzles | Jigsaw Puzzles | Number Puzzles | Card Puzzles | Einstein Puzzles | Sam Loyd Puzzles | Algebra Puzzles

Sam Loyd's Battle of Hastings Puzzle

The Puzzle:

In the Battle of Hastings that occurred on October 14, 1066 Harold's forces formed 13 similar squares with exactly same number of soldiers in each square.

When Harold himself joined the fray and was added to the number of his soldiers in those thirteen squares a single huge square could be arranged. How many men there must have been in Harold's force?