3次方程式と虚数

黒田俊郎

1．虚数が生まれた歴史

先日，「数学の教材を創る会」の例会で，名雪順一さんが次のようなレポートを発表されました。

（レポートそのままではなく黒田が少し書き換えました。）

3次方程式　$x^3-15x-4=0$　を解くことを考える。

$x=u+v$　と置くと

$$(u+v)^3-15(u+v)-4=0$$

$$u^3+v^3+3(uv-5)(u+v)-4=0$$

ここで　$u^3+v^3-4=0$，　$uv-5=0$　と置くと　uは次の方程式を満たす。

$$u^6-4u^3+125=0$$

$u^3=t$　と置く。

$$t^2-4t+125=0$$

この2次方程式を解くと

$$t=2\pm 11i$$

$u,\ v=2\pm i$　（なぜなら，$(2\pm i)^3=2\pm 11i$　となるから。）

よって，$u=2+i$，$u=2-i$

$x=u+v=4$

したがって　最初の方程式の1つの解は　4　となることがわかる。

最初の方程式の左辺を因数分解すると

$$(x-4)(x^2+4x+1)$$

となり、解は　4，$-2\pm\sqrt{3}$　となる。

解は3つとも実数なのに，この方程式を解く過程で虚数があらわれる。

私は以前　高校に勤めていたとき，「虚数が生まれた歴史」について授業をしようと思ったことがあります。

その時，「答えは実数なのに，解く途中で虚数が現れる」という方程式を探しましたが，見つけることができずにこの授業をあきらめました。

$x^3-15x-4=0$

という方程式を使えばよかったのですね。

やっと探し求めていた人に出会えたような気がしました。

２．ほかにないのか

ではこういう方程式はほかにないのでしょうか。

探してみようと思いました。

$x^3+px+q=0$　と置いて，ｐ，ｑの条件を探します。

$x=u+v$　と置くと

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

となります。

ここで

$$u^3+v^3+q=0,$$

$$3uv+p=0$$

と置きます。

このあと　u^3　と v^3　が満たす２次方程式の解が複素数になり，

この複素数が　（整数）±（整数）ｉ　の３乗と書ける条件を探します。

u,v が次の形で書けるとします（a,b は整数とします）。

$$u=a+bi$$

$$v=a-bi$$

すると，

$$u^3+v^3=2a(a^2-3b^2)$$

$$uv=a^2+b^2$$

となるので，上の式から

$$2a(a^2-3b^2)+q=0$$

$$3(a^2+b^2)+p=0$$

が得られ，結局

$$q=-2a(a^2-3b^2)$$

$$p=-3(a^2+b^2)$$

とすればよいことがわかりました。

３．方程式を作ってみます

a, b にいくつかの整数を入れて，方程式を作ってみます。

エクセルで，a に１から４まで

bに１から４までの数値を入れて計算しました。

a	b	p	q
1	1	-6	4
1	2	-15	22
1	3	-30	52
1	4	-51	94
2	1	-15	-4
2	2	-24	32
2	3	-39	92
2	4	-60	176
3	1	-30	-36
3	2	-39	18
3	3	-54	108
3	4	-75	234
4	1	-51	-104
4	2	-60	-32
4	3	-75	88
4	4	-96	256

ここで，a＝2，b＝1 の場合が名雪さんが取り上げた

$$x^3-15x-4=0$$

という方程式です。

高校生に１ページのような授業をするときには

「この表の中から１つを選んで方程式を作って解きなさい（ただし　$x^3-15x-4=0$　は除きます)。」

という課題を与えたらどうでしょう。

答（の一つは）２a になることがわかっているので，生徒たちも「本当のそうなるかな？」と安心して

解答に取り組むことができると思います。

（以下は高校生のための「付録」です）

4．ほかの解も求めてみましょう

（3）ページのｐ、ｑ　を使って３次方程式を作ると，解の一つは　2a　になります。

ほかにも２つの解があります。

その解を求めてみましょう。

方程式は

$$x^3-3(a^2+b^2)x-2a(a^2-3b^2)=0$$

となるので，左辺は次のように因数分解できます。

$$(x-2a)(x^2+2ax+(a^2-3b^2))$$

そこで，$x^2+2ax+(a^2-3b^2)=0$　を解くと，

$$x=-a\pm b\sqrt{3}$$

となります。

この解も２つとも実数ですね。

以上で，「3 つの実数解を持つ 3 次方程式でも，解く途中で，虚数が現れる場合がある」

ということを説明しました。

これは数学の歴史上，「虚数というのはよくわからないが役に立つ」ということが初めて認識された「事件」だったということです。当時の人はびっくりしたでしょうね（16 世紀のヨーロッパでの出来事です）。

5．もう一つの解き方

（1）ページの方程式

$$x^3-15x-4=0$$

の解き方をもう一度考えてみます。

$u^3=2+11i$　から　$u=2+i$　を導きました。

でも実は、$u^3=2+11i$　を満たす u は　$u=2+i$ だけではありません。

このほかに，　$u=\omega(2+i)$ と　$u=\omega^2(2+i)$　という解があります。

（ω　は　$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$　という数で，３乗すると１になるので，「１の３乗根」と呼ばれています。

ω^2　は$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$　となり，やはり「１の３乗根」です。）

v の方にも，　$v=\omega(2-i)$ と　$v=\omega^2(2-i)$　という解があります。

u が３通り，v が３通り　あるので　u，v　の組み合わせは９通りあることになります。

でも，u，v　には，　$uv=5$　という条件があります。

この条件を満たすのは，次の３つの組み合わせです。

$u=(2+i) \quad v=(2-i)$

$u=\omega(2+i) \quad v=\omega^2(2-i)$

$u=\omega^2(2+i) \quad v=\omega(2-i)$

したがって $x=u+v$ の値は次の３通りです。

$x=(2+i)+(2-i)=4$

$x=\omega(2+i)+\omega^2(2-i)=-2-\sqrt{3}$

$x=\omega^2(2+i)+\omega(2-i)=-2+\sqrt{3}$

こうして因数分解することなく，３つの解を求めることができました。

同様にして

$$x^3-3(a^2+b^2)x-2a(a^2-3b^2)=0$$

の３つの解を求めてみましょう。

$x=u+v$ と置いて次の条件を満たす u, v を求めます。

$u^3+v^3=2a(a^2-3b^2)$

$uv=a^2+b^2$

上の２つの条件から，u^3，$v^3=(a\pm bi)^3$ が得られます。

ここで $u^3=(a+bi)^3$ ，$v^3=(a-bi)^3$ であるとします。

$u^3=(a+bi)^3$ という式から，

$u=(a+bi)$，$u=\omega(a+bi)$，$u=\omega^2(a+bi)$

という３つの解が得られます。

また，$v^3=(a-bi)^3$ という式からは

$v=(a-bi)$，$v=\omega(a-bi)$，$v=\omega^2(a-bi)$

という３つの解が得られます。

u が３通り，v が３通り　あるので　u，v　の組み合わせは９通りあることになります。

でも，このうち　$uv=a^2+b^2$ となるのは，次の３つの組み合わせです。

$u=(a+bi) \quad v=(a-bi)$

$u=\omega(a+bi) \quad v=\omega^2(a-bi)$

$u=\omega^2(a+bi) \quad v=\omega(a-bi)$

したがって $x=u+v$ の値は次の３通りです。

$x=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$x=\omega(a+bi)+\omega^2(a-bi)=-a-b\sqrt{3}$

$x=\omega^2(a+bi)+\omega(a-bi)=-a+b\sqrt{3}$

こうして因数分解することなく，３つの解を求めることができました。　　(終)