「もしそうでなかったら」という技法

黒田俊郎

1.

先日「西三数学サークル」の例会で　大西俊弘さん（龍谷大学）から　,「問題の作り方」として,
「What-if-not　(もしそうでなかったら)」　という技法をおしえてもらいました。

例えば，次のような問題があるとします。

「ある店でおにぎりを1個100円で売ると1日に600個売れるが，1円値上げするごとに4個の割合で売り上げが減ることが今までの経験からわかっているものとする。1日の売上金額を最大にするにはいくら値上げしたらよいか」

この問題を　細かく「条件」に分けてみます。

(A)「ある店で
　おにぎりを
　1個100円で売ると
　1日に600個売れるが，
　1円値上げするごとに4個の割合で売り上げが減ることが今までの経験からわかっているものとする。
　1日の売上金額を最大にするにはいくら値上げしたらよいか」

そして,「条件」のそれぞれについて，これらを変更してみよう，という技法です。

例えば

(B)「お菓子屋さんで
　草もちを
　1個100円で売ると
　1日に700個売れるが，
　1円値上げするごとに3割の割合で売り上げ個数が減るという。
　1日の売上金額を最大にするにはいくら値上げしたらよいか」

と変更したらどうでしょう。

実は(A)の問題は　1998年に私が「微分法（二次関数）の期末試験に出題した問題です。
そして続いて「この問題と似た問題を１題作って解答しなさい」という問題を出題しました。
そのとき高見君という生徒がつくったのが(B)の問題です。
「What-if-not　(もしそうでなかったら)」という技法、と言わなくても，自然にそうなっていますね。
でも逆に，この技法を積極的に使ったら，もっと楽に問題が作れたかもしれません。

高見君はこの問題の解答を次のように書いていました。

「1日の売上金額は，

値上げをしなければ　$100\times700=70000$

1円値上げをすると　$101\times490=49490$

２円値上げをすると　$102\times343=34986$

3円値上げをすると　$103\times240=24720$

値上げをするとどんどん売り上げが減っていく。

したがって値上げしないほうが良い」

私は　「1円値上げするごとに4個の割合で売り上げが減る」　という条件を

「1円値上げするごとに3割の割合で売り上げ個数が減る」　という条件に

変えたという発想に感動しました。そして，この発想を何とか生かしたいと思いました。

そこで，この条件を次のように変えたらどうなるか，考えてみました。

「1円値下げするごとに3割の割合で売り上げ個数が増えるという。」

「1日の売上金額を最大にするにはいくら値下げしたらよいか」

この条件で，高見君の問題は，

「x円値下げした時の売上金額をy円とすると，

$y=(100-x)\times(700\times1.3^{x})$　」

という式で表されます。

これを解くと，$x=96$のとき，y が最大になることがわかります。

このときの草もち1個の値段は4円。

売り上げ個数は約60兆個。売上金額は約240兆円。

こんな荒唐無稽な問題になりました。

2.

「もしそうでなかったら」という技法はとても有効だと思います。

私は今まで生徒たちに対して「この問題と似た問題をつくりなさい」という問題を出題してきました。

その中には私が想像もつかなかった問題もありました。

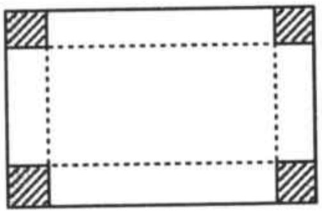
その一例は次の問題です。

まず授業で次の問題を説明しました。

「たて10cm、よこ16cmの長方形の厚紙があります。

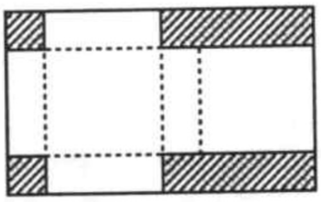
この厚紙の4隅から同じ大きさの正方形を切り取って残りを折り曲げ，ふたのない箱をつくる。

箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の1辺の長さをいくらにしたらよいか。（図　A）



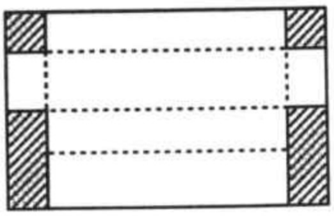
(A)

このあと，生徒たちに「これと似た問題をつくりなさい」という問題を出題したところ，工藤君という生徒が次のような作り方を考えました。(図 B)



(B)

次の年に授業でこの問題を取り上げたところ，今度は島田さんという生徒が次のような作り方を考えました。(図 C)



(C)

これらは両方とも最初の問題の
「 この厚紙の4隅から同じ大きさの正方形を切り取って残りを折り曲げ，ふたのない箱をつくる。」
という条件を「ふたのある箱をつくる」という条件に変更したものです。
「もしそうでなかったら」という技法を意識的に使ったら，これらの問題も作るのが容易になっていたかもしれません。

これらの箱の作り方には「それでは工藤君の作り方の最大容積と，島田さんの箱の作り方の最大容積とではどちらの方が大きいか」という問題も考えられます。
さらに「もっと大きい箱が作れないか」と考えると，世界がどんどん広がっていきます。

「ふたのある箱の問題」は　2023年共通テスト数学Ⅱ・数学Ｂ（追試）第2問[1]に出題されました。

https://math.nakaken88.com/problem/kyotsu-2b-2023-re-2-1/

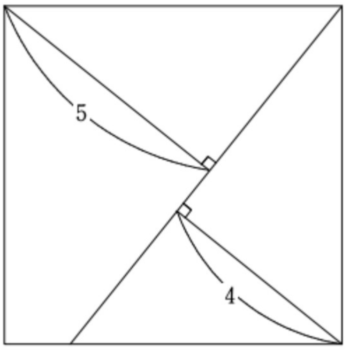
上記がその解説のサイトです。

3.

先日矢野葉子さん（津田塾勉強会）から次の問題を送っていただきました。

（1）最初の問題

外の四角は正方形です。　この正方形の1辺の長さはいくらですか。



（2）この問題にヒントを得て矢野葉子さんが作った問題です。

「正方形 ABCD の頂点 A を通る直線をひきます。

B からその直線に下ろした垂線の長さが7cm，

D からその直線に下ろした垂線の長さは 4cm でした。

頂点 A を通るもう1本の直線をひき，B から垂線を下ろしたら垂線の長さは8cm でした。

このとき，D から下ろした垂線の長さは何 cm でしょう。」

（3）　私は「もしそうでなかったら」の技法を使ってみたいと思いました。

そこで，最初の「正方形 ABCD」を変えることができるかどうか考えてみました。

次の問題ができました。

「長方形 ABCD を考えます。AB：BC＝2：1　です。

頂点 A を通る直線を引きました。

B からその直線へ下ろした垂線の長さが8cm，

Dからその直線へ下ろした垂線の長さは3cmでした。

このとき，この長方形の2辺 AB,BC の長さはそれぞれ何cmでしょうか。」

この問題はどうでしょうか。

$\boxed{4,}$

「もしそうでなかったら」 の技法を使うと，いろいろな問題を発展させることができます。
少し考えてみました。

(1) 高校の教科書には 「3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, を頂点とする三角形 ABC の重心の座標は(…，…)であることを証明せよ」 ((…、…)は省略しました)
という問題がのっています。
「外心」「内心」「垂心」「傍心」では座標はどうなるのでしょうか。
(インターネットで「高校数学の美しい物語　三角形の重心座標」というところに答えがのっていました。)

また　三角錐には「外心」「内心」「垂心」「傍心」のようなものがあるのでしょうか。
あるとしたら，その座標はどうなるのでしょうか。

(2) $\boxed{2}$ の最初の問題のような 「ふたのない箱」 をつくる問題で，一般の三角形や四角形さらに一般の多角形　の場合はどうなるのでしょうか。(ただし凸の場合に限ります)
(「底面積と側面積が等しいとき」 に容積は最大になります)

(3)「コラッツの予想」というものがあります。(NHK の「笑わない数学」でも取り上げられました。)

「任意の正の整数 n に対して、以下で定められる操作について考える。

- n が偶数の場合、n を 2 で割る
- n が奇数の場合、n に 3 をかけて 1 を足す

このとき、「どんな初期値から始めても、有限回の操作のうちに必ず 1 に到達する」という主張が、コラッツの予想である。」　ということです。(ウィキペディアによる)

ここで 「3」 でなくて 「5」 であればどうか，「7」 であればどうかと考えてみました。
。

(4)「3角形の3辺の長さを a,b,c として，外接円の半径を R とするとき，

$$a+b+c \leqq 3\sqrt{3}R$$

が成り立つ」
という問題がありました。
円に内接する4角形ならどうか，5角形ならどうか，…，一般にn角形ならどうかと考えてみました。

「もしそうでなかったら」の技法はなかなか面白いと思います。