^

数学教育法の授業から

黒田俊郎

〒３５０－１１０９　埼玉県川越市霞ヶ関北３－１８－３３

Ｅメール；　t-kuroda@mtj.biglobe.ne.jp

職歴

１９６３―１９７８　都立北園高校定時制

１９７８－１９８４　都立小平養護学校高等部

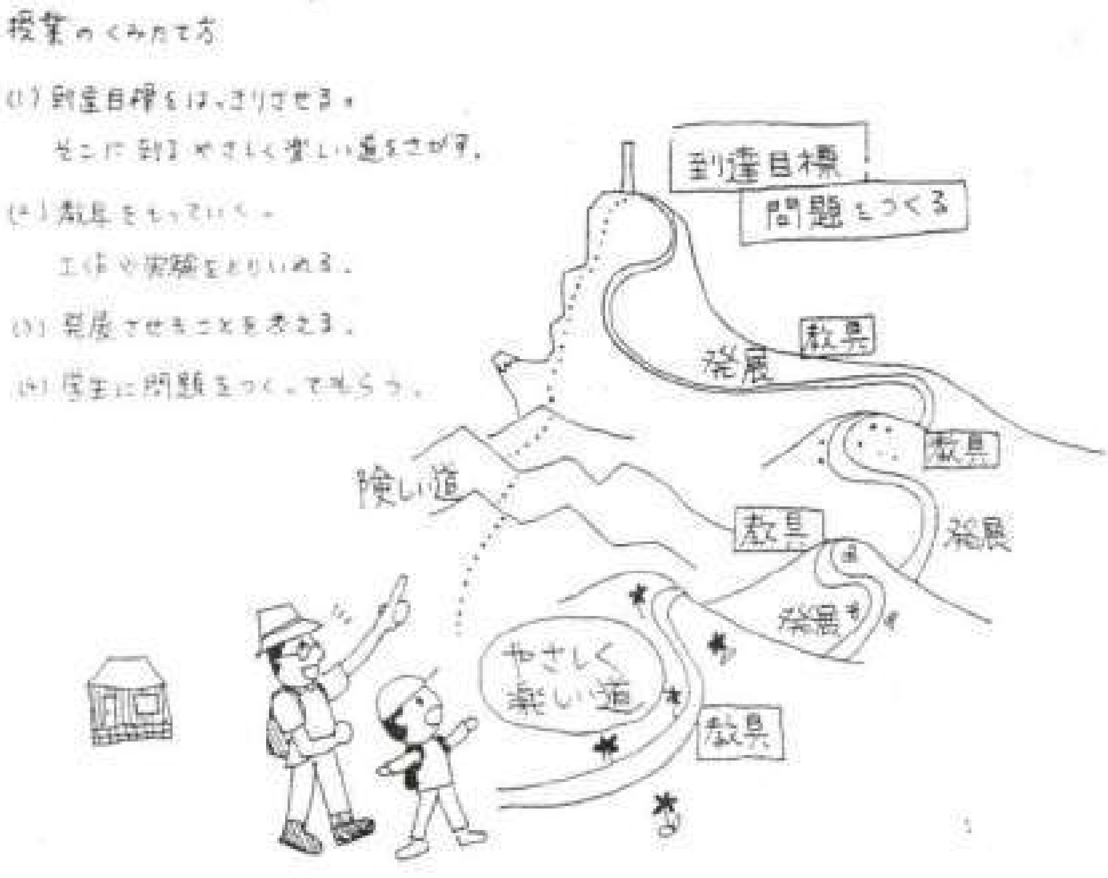
１９８４－１９８９　都立清瀬高校（全日制・普通科）

１９８９－１９９９　都立久留米高校定時制

２００１－２００９　武蔵工業大学非常勤講師（「数学教育法」を担当）

２００６－２０１５　東京電機大学非常勤講師（「数学科教育法」を担当）

２０１５－２０２２　東京電機大学で学生の模擬授業を見て助言



「授業のくみたて方」を次のように変更したいと思います。

（１）　到達目標をはっきりさせる。

（２）　到達目標に到るやさしく楽しい道をさがす。教具・工作・実験を活用する。

（３）　生徒に問題をつくってもらう。

「授業の組み立て方」を考えるということ。

私が教員になったころ、組合の教研では「自主編成」という言葉が飛び交っていました。

「教科書を教える」でも「教科書で教える」でもなく「教科書は使わない」「教師が自分で教科書をつくる」ことが最善だ，という雰囲気でした。戸山高校の武藤徹さんはプリント教材を生徒たちに配って，生徒たちがそれをもとに授業を行うという方法で授業をされていました。

私も自分なりの教科書をつくって，それを使って授業をしようと思いました。

しかしそれはとてもむつかしいことです。

そのころ（１９６０年代後半）「仮説実験授業」を知りました。

仮説実験授業では，１枚ずつプリントを配ります。

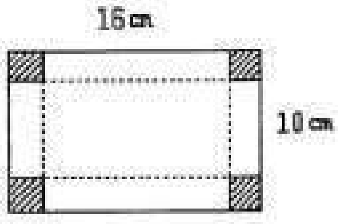
「１枚ずつ配るのであれば，プリント授業もできる」と思って、それからはずっとプリントで授業をしてきました。

1　到達目標をはっきりさせる

【はじめに】　「到達目標をはっきりさせる」ことの大切さ

微分法

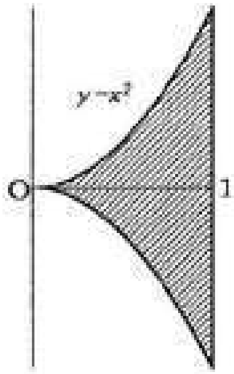
① 右図のような長方形の厚紙がある。
この厚紙の４すみから，同じ大きさの正方形を切り取り，のこりを折り曲げてふたのない箱をつくる。
箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の一辺をいくらにしたらよいか。



積分法

① $y=3-0.04x^2$ のグラフの $-5\leqq x\leqq 5$ の部分を x 軸の周りに回転させるとビールだる型の立体ができる。
この立体の体積を求めよ。

② 右のような厚紙でコマをつくりたい。
どこに心棒をさしたらよいだろうか。



数学Ⅲの微積分

① お湯の冷め方（微分方程式）

容器にお湯を入れて，お湯の温度を測ります。

測り始めてから t 分後の温度をT℃とすると，

$t=0$ のとき　T＝71　…（1）

$t=10$ のとき　T＝67　…（2）

となりました。以後の温度を推測してみましょう。

（室温を測ったら24℃でした。）

② ランチェスターの法則（連立微分方程式）

「A校・B校が，ドッジボールをした。

A校の生徒は，B校の生徒よりドッジボールがうまく，1分間あたり，

A校の生徒1人は，B校の生徒0.5人に当てる。

B校の生徒1人は，A校の生徒0.1人に当てる。

（なおこのドッジボールでは，ボールに当たったものは，ゲームから除かれるものとする）

A校30人，B校100人でゲームをはじめるとき，どちらのチームが勝つだろうか。」

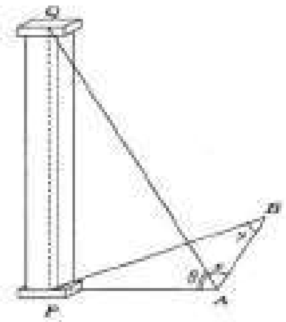
三角関数

① K探検隊が南アメリカの秘境を訪れたところ，目の前にいきなり広場が現れ，その中央に古代遺跡があった。

その中で一番高い柱の高さを調べることになった。

AB間の距離は１５ｍで、ｘは１０５°，ｙは４０°，θは６８°である。

柱の高さPQ を求めよ（生徒作品）。



② 振動数440Hzの音叉と，振動数442Hzの音叉を同時にならすと　うなりが生じる。

うなりは1秒間に何回起こるか。

指数関数・対数関数

① ジャックが豆をまきました。

1時間後に外に出てみると，5ｃｍ芽が出ていました。

そこからその芽は，1分で1％ずつ大きくなります。

豆の木が雲（5000m）に届くのは，豆をまいてから何時間後でしょう（生徒作品）。

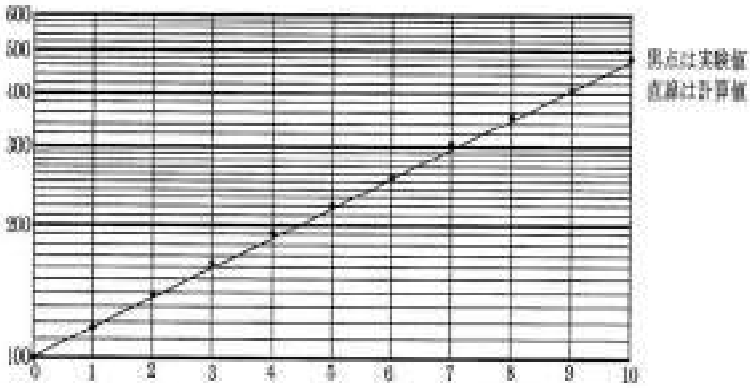
② 半対数方眼紙，全対数方眼紙を活用する。

) 指数関数の増加の様子は、サイコロを使って、そのシミュレーションを実験することができます。実際に実験してみました。

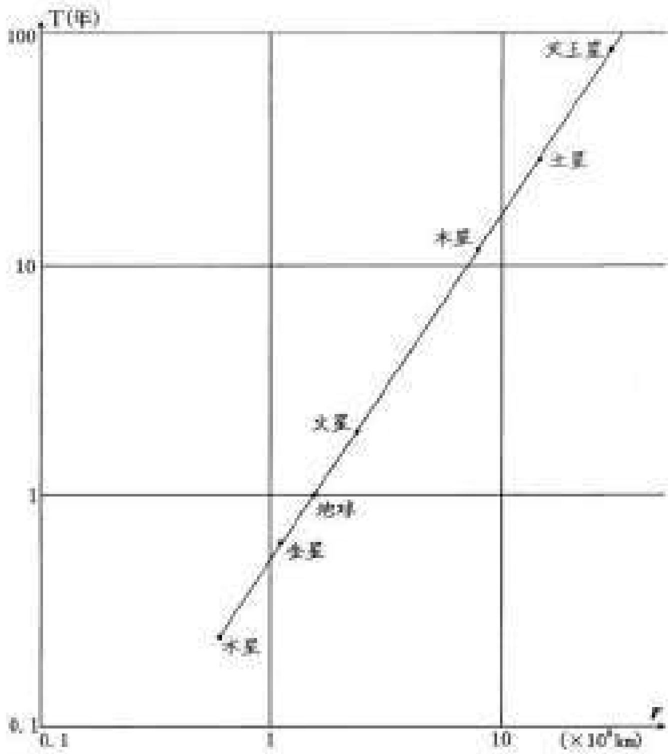
（式）　$y=100\times(7/6)^x$

年後	計算値	実験値
0	100	100
1	116	116
2	136	137
3	158	163
4	185	192
5	216	220
6	252	254
7	294	304
8	343	353
9	400	409
10	467	478

半対数方眼紙に目盛っていくと、次のようになります。



惑星の軌道半径 r と公転周期T

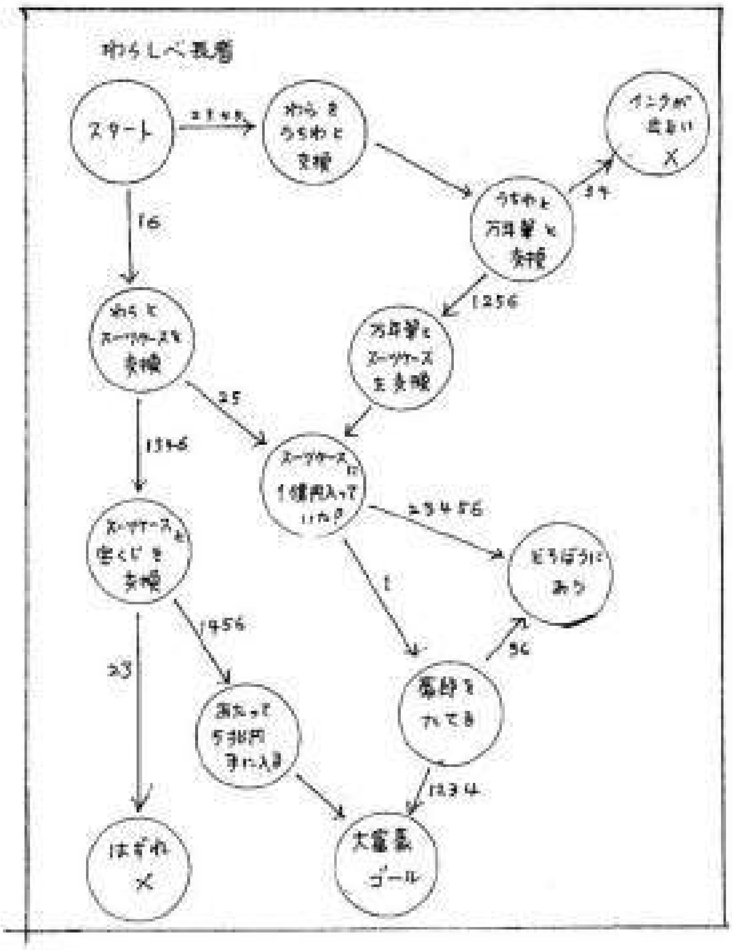


行列　（ 行列の到達目標は『数学教室』１９７６年７月号の小沢健一さんの公開授業を参考にしました。）

「ハメハメハ大王は悩んでいます。
最近ハメハメハ王国にも「過疎・過密現象」が現れたからです。
人口問題の権威者ハメハメハ博士は言います。
「現在のところ農村部の人口の方が都市部より多いのですが，今後数年間は，毎年農村部人口の 30%が都市部に移り，都市部人口の 10%が農村部に移るものと予測されております」
ハメハメハ大王「すると将来はほとんど全人口が都市部に集中することになるな」
ハメハメハ女王「いいえあなた，はじめのうちこそ都市部に集中するでしょうけど，そのうち農村部もふえはじめ，その後はふえたりへったりするんじゃないこと」
ハメハメハ王子「都市部と農村部の今年の人口がわからないと，本当のところはわからないよ」
ハメハメハ姫「都市部の人口は，はじめのうちはだんだんふえるけど，そのうちほとんど変化がなくなってしまうんじゃないかしら」
さて，だれの考えが正しいでしょう。
ただし，ハメハメハ王国の人口は，いつも 100 人で，増減はないものとします。」
（拙著『行列のえ·ほ·ん』(三省堂 1978 年)より。ただし，原文では人口が 100 万人になっていましたが，「南の島のハメハメハ大王」の歌のイメージに合わないので 100 人に変えました。）

確率

① シミュレーションゲーム（学生作品）（シミュレーションゲームは下町壽男さんのアイディアです。）



②　「赤胴鈴之助キャラメル」というお菓子を買うと，1 箱に「赤」「胴」「鈴」「之」「助」のどれかのカードが 1 枚入っている。この５文字のカードをそろえるには，平均して何個のキャラメルを買わなければならないか。ただし，この５文字のカードはどれも同じ割合で入っているものとする。

（清水義範『いやでも楽しめる算数』講談社 2001 年より）

統計

全国の有権者から 1000 人を無作為に選んで「現内閣を支持するか」とたずねたところ，「支持する」と答えたものが 100 人（10%）だった。全国の有権者全体の中での支持率は何%から何%の間といえるか。

ただし，危険率を 5%とする。

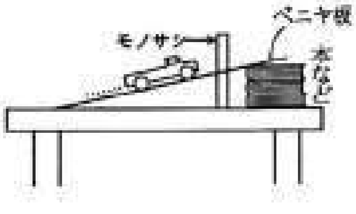
【追記】

「どういう問題が「到達目標」として適当か」というと，それは「生徒たちに「これと似た問題をつくりなさい」という課題を出したとき，生徒たちが容易に楽しく「似た問題」をつくれること」だと思います。

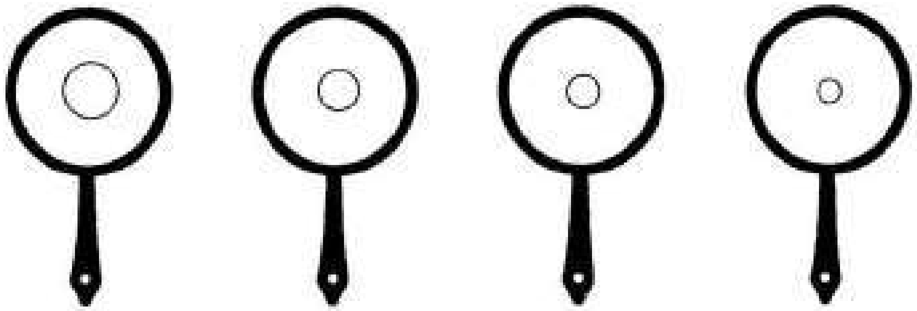
2　到達目標に到るやさしく楽しい道をさがす。教具・工作・実験を活用する。

微分　グラフの購買を測定して導関数を求める。微分の計算は最後に行う。

①　登坂能力を測定する

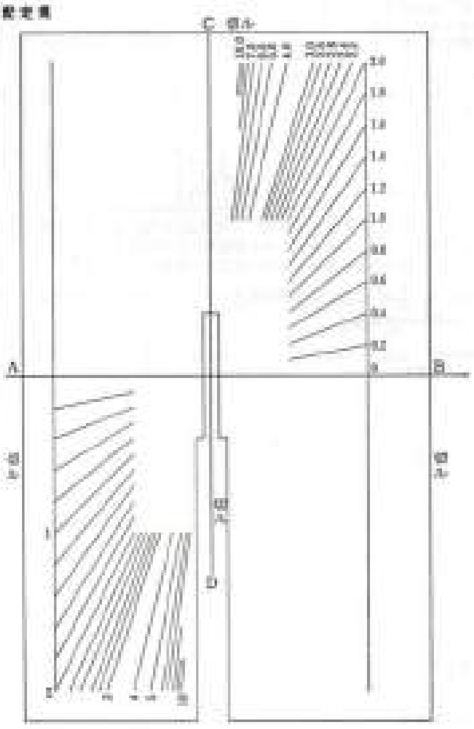


②　曲線も狭い範囲では直線に見える（魔法のめがね）。



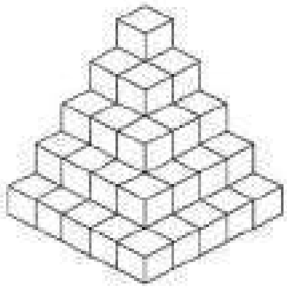
（はじめに、一番左側のめがねを使う。直線に見えなければ，順次右側のめがねに移る）

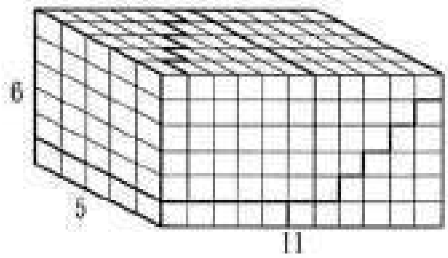
③　勾配定規で勾配をはかる（名雪順一さん考案のもの）。

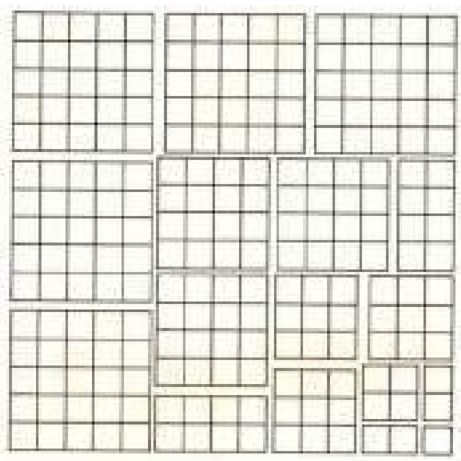


積分　定積分は区分求積法によって定義する。（「原始関数の差」による定義はとらない。）

① 自然数の２乗、３乗の教具を使う。

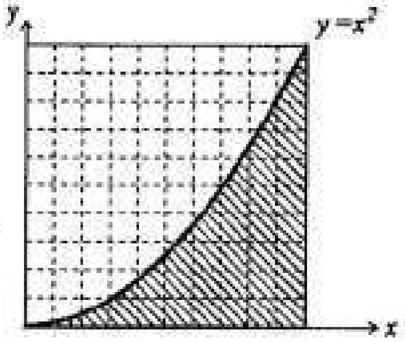


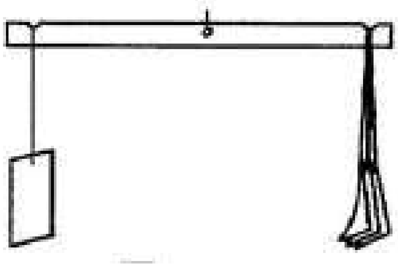




（これらの教具は　コールマン‣ユシケービッチ共著『数学史２』（東京図書）を参考にしました。）

② 天秤で確かめる（林栄治さんのアイディアです）。





数学Ⅲの微積分

たくさんの実験がある分野です。

① お湯の冷め方の実験

② ランチェスターの法則の実験　　のほかに次のような実験もあります。

③ ペットボトルの排水実験

ペットボトルの底に穴をあける。この穴を手でふさいで水を入れ，排水を始める。

排水を始めてから，水の高さが半分になるまでの時間をはかる。

排水が完了するまでの時間を計算で求める。

実験で確かめる。

④ 懸垂線の長さ

方眼紙に懸垂線のグラフをかき，それに沿ってチェーンを垂らす。

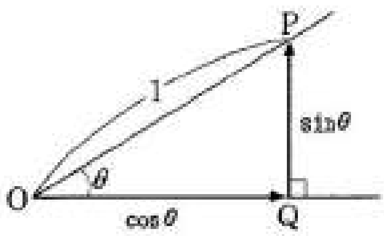
（きれいに一致します。この実験は林栄治さんのアイディアです。）

チェーンの長さを計算で求めてから，チェーンを外して実際の長さをはかる。

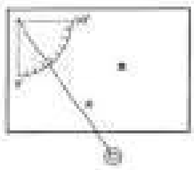
三角関数

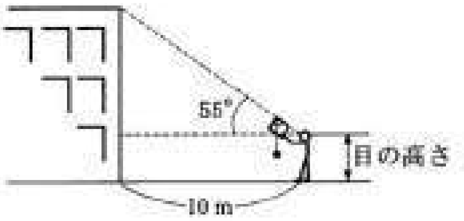
① sin, cos は「線分の長さ」で定義する（「比」では定義しない）。

（定義については（付録）の『三角比の定義についての 3 つの資料』を参照してください。）



② 角度測定器をつくり，これを使って校舎の高さをはかる。





上図の場合，目の高さを1.5mとすると，校舎の高さは10×tan55°＋1.5＝13.4（m）となります。

指数関数・対数関数

① log記号はなるべく使わない.

対数表を使って，次のように計算する。

$$
\begin{aligned}
2^{60} &= (10^{0.3010})^{60} \quad \text{（ここで対数表を使った）}\\
&= 10^{18.06}\\
&= 10^{18}\times 10^{0.06} \quad \text{ここでまた対数表を使った}\\
&= 10^{18}\times 1.15
\end{aligned}
$$

② 対数方眼紙（特に　半対数方眼紙）は、もっといろいろな場面で利用されていいと思います。

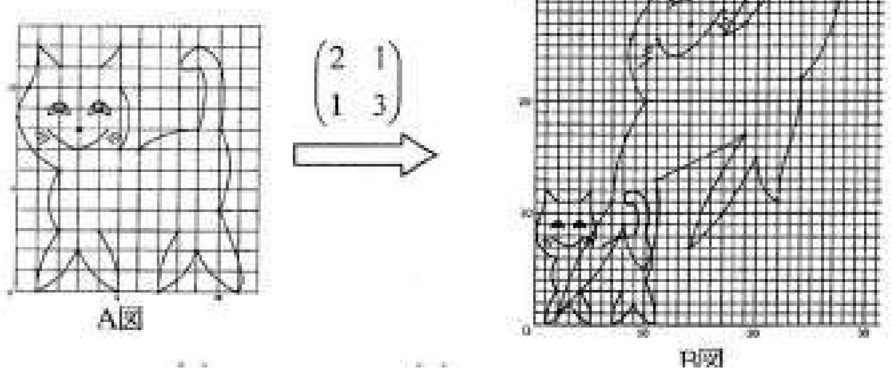
行列

① 1次変換の考え方を使う。

行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

によって，猫はA図からB図にうつる。



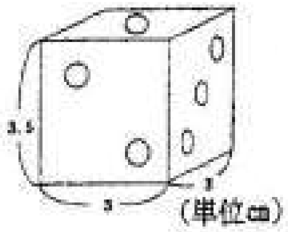
② できれば　固有値，固有ベクトル，行列の対角化まで扱いたい。

確率

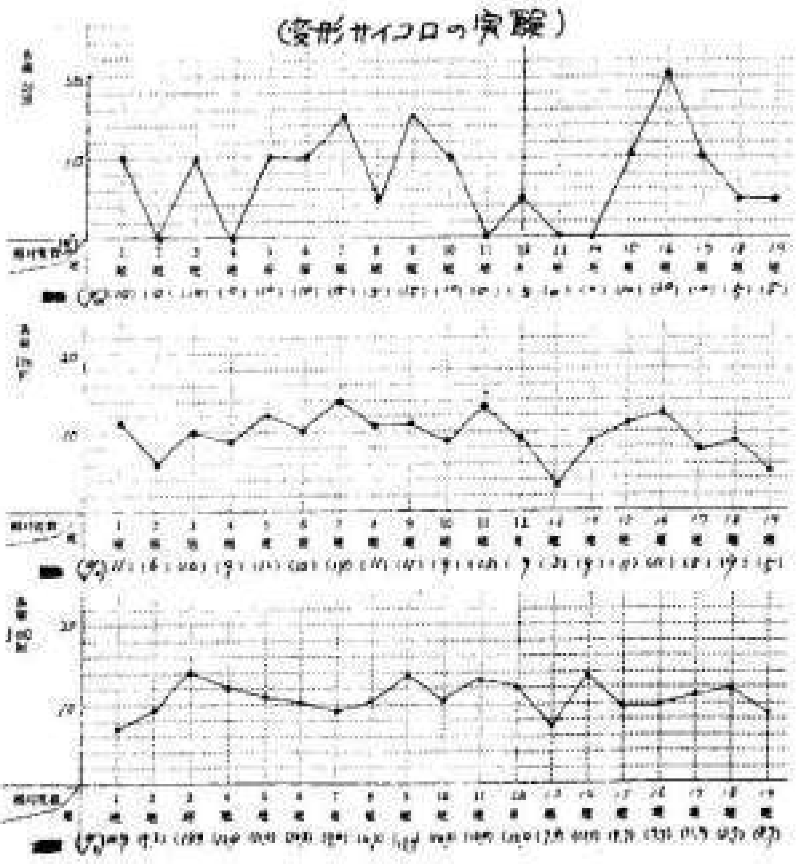
① 「根元事象が同じように確からしい場合」だけについて確率を定義するのではなく

「相対度数の極限　」　で定義する。

「下の図のような変形サイコロを振ったとき，１の目が出る確率はあるだろうか」という質問から始める。



この「変形サイコロ」を班に分かれて各班300回ずつ降って，20回，100回、300回の結果をグラフに表す。（下の図は　2006年4月28日　武蔵工業大学における実験の結果です。）



「多数回試行を行うと，相対度数はだんだん一定の値に近づくことが分かる。

この一定の値をこの事象の起こる確率という」と定義する。

【追記】確率の定義をこのような「変形サイコロ」によって説明するのは　小沢健一さんのアイディアです。

小沢さんはこの「変形サイコロ」に「サイドタ」と命名しました。

「コロコロ…」と転がらずに　「ドタ！」と倒れるからです。

統計

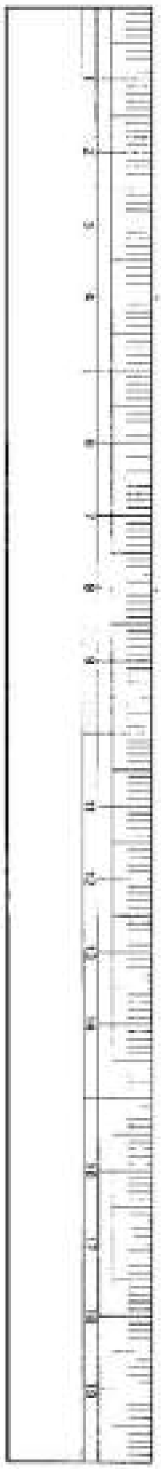
① 統計で最も大事な概念が「標準偏差」です。

『明解数学Ⅱ』（三省堂教科書　１９８９年初版）には次の作業を載せました。

この作業は　何森仁さんのアイディアです。

素晴らしい教材だと思います。

Ⅱ-12　テープを切る



上の線分の長さは，正しく10cmである。

この線分をよく見て，10cmの感じをつかみ，次にこのページをとじて，自分の感じをもとに，紙テープを10cmの長さに切ったものを100本つくれ。

作業が終わったら，「検査」をしよう。テープの長さを正しく測って，下の表を完成し，平均値と標準偏差を求めてみよう。

長さ　(cm) 以上～未満	度数	中間の値	中間の値×度数
5.75～ 6.25		6.0	
6.25～ 6.75		6.5	
6.75～ 7.25		7.0	
7.25～ 7.75		7.5	
7.75～ 8.25		8.0	
8.25～ 8.75		8.5	
8.75～ 9.25		9.0	
9.25～ 9.75		9.5	
9.75～10.25		10.0	
10.25～10.75		10.5	
10.75～11.25		11.0	
11.25～11.75		11.5	
11.75～12.25		12.0	
12.25～12.75		12.5	
12.75～13.25		13.0	
13.25～13.75		13.5	
13.75～14.25		14.0	
14.25～14.75		14.5	
14.75～15.25		15.0	
15.25～15.75		15.5	
合計			

平均値：　　　　標準偏差：

（「上の線分の長さは，正しく 10cm である」と書いてありますが，コピーしたものなので、正しくはありません。）

② 生徒たちは「2乗して平均して平方根をとるという操作はいったい何をしているのか」という疑問を感じるでしょう。

次の不等式を知っていたら，この疑問は軽くなるかもしれません。

負でない実数　x_i　に対して

$$\frac{x_1+x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$$

が成り立つ。一般に次の不等式が成り立つ。

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

この不等式の右辺は

「x_1, x_2 の（x_1, x_2、…, x_nの）２乗平均」（または「２乗平均平方根」

と呼ばれています。

これも一種の平均です。

例えば　国語が１００点　数学が０点の場合

相加平均では　　平均点が５０点ですが

２乗平均では　　平均点が７１点になります。

点数にばらつきのある人に有利な平均の仕方です。

偏差の相加平均はいつでも０になるので，その代わりに２乗平均をとって計算しているのです。

なお，上の不等式はさらに一般化できます。次のように表現されます。

累乗平均の不等式（power mean inequality）

任意の非負の実数 x_k たちと正の実数 p に対して

$$f(p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと $f(p)$ **は単調増加である。**

上の枠内は　２つともインターネットの「高校数学の美しい物語」というサイトからのコピーです。

このサイトには：証明も載っています。

なおｆ（０）は定義されませんが，　$\lim_{p \to 0}$ ｆ（ｐ）は相乗平均になります。

（力学の「慣性モーメント」と結びつける解釈もあります。）

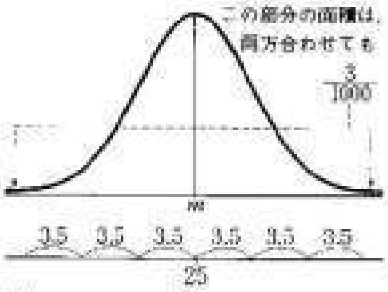
③　「明解数学Ⅱ」（三省堂教科書　1989）に次のような実験を載せました。

Ⅱ-13　アラビア語のテスト

下のテストは，アラビア語の単語のテストである．このテストにでたらめに答えよう．

先生の発表する正解にもとづいて1題1点として採点してみよう．じつは，この点数の分布は，平均値25点，標準偏差が3.5点の正規分布に近いことが知られている．

得点が14点以下あるいは36点以上になる確率は，$\frac{3}{1000}$ぐらいで，とてもめずらしいことである．14点以下あるいは36点以上の人がいたら，拍手してあげよう．



［図］
14点以下あるいは36点以上になる確率

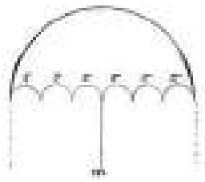
次のアラビア語の単語の意味はア，イのどちらであるか．正しい方に○をつけよ．

(1)	أُمّ	ア 父	イ 母	(26)	بَحْر	ア 海	イ 水
(2)	نَهْر	ア 山	イ 川	(27)	صَحْن	ア 皿	イ スプーン
(3)	كُرْسِيّ	ア 机	イ いす	(28)	خُبْز	ア パン	イ バター
(4)	صَغِير	ア 大きい	イ 小さい	(29)	النِّيل	ア ナイル川	イ ユーフラテス川
(5)	بِنْت	ア 少年	イ 娘	(30)	اليَوْم	ア 今日	イ 明日
(6)	يَد	ア 手	イ 足	(31)	وَسِخ	ア きれいな	イ 汚い
(7)	عَيْن	ア 目	イ 口	(32)	قَدِيم	ア 新しい	イ 古い
(8)	سَاعَة	ア 時計	イ テーブル	(33)	نَجْم	ア 月	イ 星
(9)	لَحْم	ア 肉	イ ナイフ	(34)	فَاكِهَة	ア コーヒー	イ 果物
(10)	تُفَّاح	ア リンゴ	イ 魚	(35)	يَابَانِيّ	ア 中国人	イ 日本人
(11)	مَيْدَان	ア 村	イ 広場	(36)	اِمْرَأَة	ア 男	イ 女
(12)	حَرْب	ア 軍隊	イ 戦争	(37)	مَكْتُوب	ア 花	イ 手紙
(13)	صَحْرَاء	ア 石油	イ 砂漠	(38)	أَرْنَب	ア 亀	イ 兎
(14)	طَائِرَة	ア 自動車	イ 飛行機	(39)	مَعْنًى	ア 辞書	イ 意味
(15)	رَبِيع	ア 夏	イ 春	(40)	حُكُومَة	ア 国民	イ 政府
(16)	مَطَر	ア 雨	イ 太陽	(41)	كَنْز	ア 宝物	イ 帽子
(17)	أَبْيَض	ア 白い	イ 黒い	(42)	رُبَّان	ア 船長	イ 乗客
(18)	طَرِيق	ア 道	イ 窓	(43)	غَدَاء	ア 昼食	イ 朝食
(19)	بَعِيد	ア 遠い	イ 近い	(44)	عَذْب	ア あまい	イ からい
(20)	أُسْتَاذ	ア 教授	イ 生徒	(45)	شَمَال	ア 北	イ 南
(21)	أَنْتَ	ア 私	イ あなた	(46)	الجُمُعَة	ア 金曜日	イ 土曜日
(22)	قَلْعَة	ア 城	イ 土	(47)	جَرَى	ア 走る	イ 歩く
(23)	عَمِيق	ア 長い	イ 深い	(48)	بَكَى	ア 泣く	イ 謝る
(24)	نَعَم	ア いいえ	イ はい	(49)	فَرَّ	ア 逃げる	イ 近づく
(25)	نَار	ア 風	イ 火	(50)	ثَلْج	ア 雪	イ 光

注意　アラビア語を知っている人はこのテストを受けてはいけない．

生徒たちは「1クラスに40人もいるのだから1人ぐらいは36点以上（または14点以下）をとるだろう」と予想するが　そういうことはまず起こりえません。

（なお正解は　　1－5，11－15，21－25、30－40　がイ　そのほかはア　）



ほとんどのデータは　m±３σ　の範囲内に収まって，この範囲外のデータはわずかです。

正規分布の場合は　　3/1000　（0.3%）程度

普通のデータでは　せいぜい１ ～ ２　%程度

最も多くなる場合は1/9 11.1%）　です（「チェビシェフの不等式」による）。

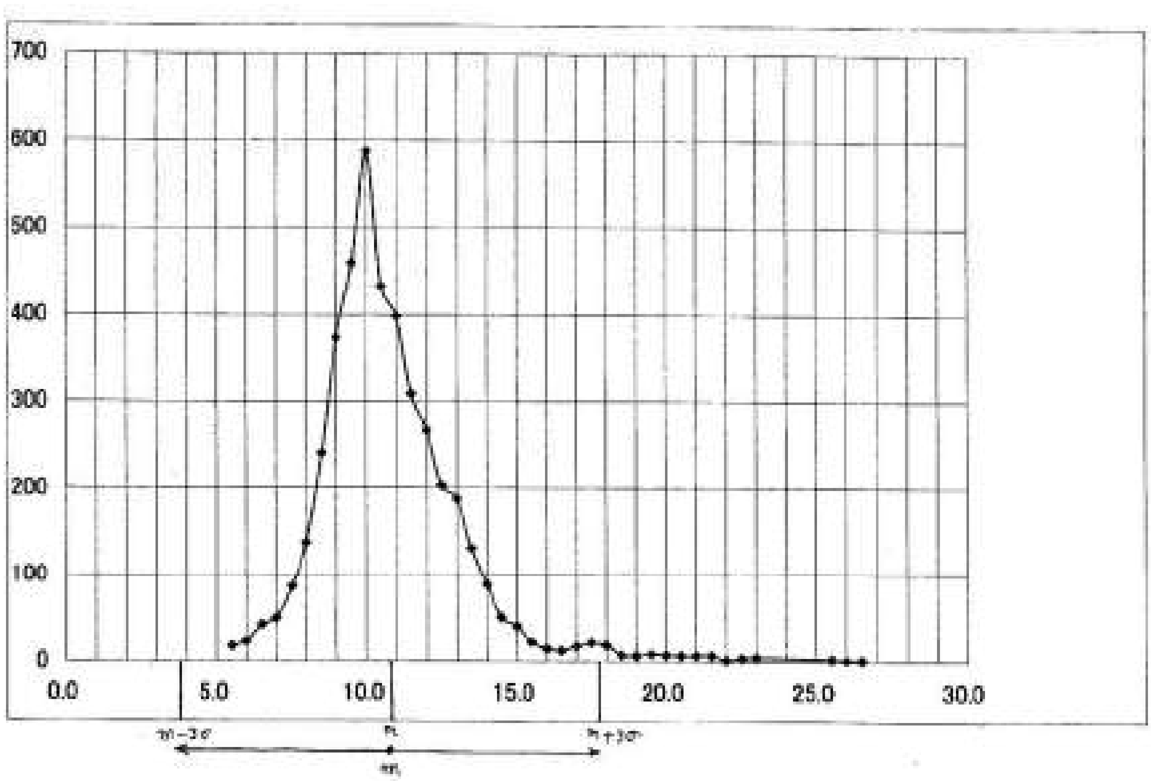
200年6月211日　武蔵工業大学の授業で「テープ切」を行いました。

その結果，下のグラフのようになりました。

m＝　１０．７８　　　，σ＝２．３３

m－3σ＝　３．８０　　　　，m+3σ＝　１７．７６

m±3σ　の範囲外に出たのは　４２８２本中　７６本（１．８%）でした



3　生徒に問題をつくってもらう

私が数教協全国大会にはじめて参加したのは1965年でした。

以後ほとんど毎年参加しましたが当時の高校分科会はとても高度で，近数教の方々が「高校の数学がむつかしいのはガラクタ教材ばかりだからだ。程度をあげればもっとわかりやすくなる」という仮説のもとに程度の高い「テキスト」をつくってその解説を行うレポートがほとんどだったように思います。

1970年から私は授業の記録を発表しましたが，こういう発表は少数で，全体としてはやはり分科会の内容は高度でした。

ところが1972年の大会で遠山さんが次のような話をされました。

「高校の先生方は,大学の数学が本当の数学だと思っているようだが，そうではない。生きた生徒の頭の中に生きた数学がある。生徒と一緒に数学をつくって、そこから数学を眺めてみたらどうか」

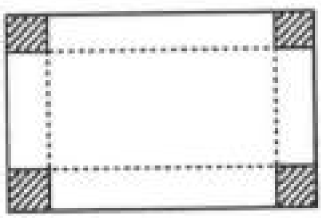
私は「本当かな？」と思いました。目の前の生徒の頭の中にどんな数学があるのでしょうか。

（1）　このとき私は微分法の授業をしていて，授業では次の問題を取り上げていました。

「たて10cm、よこ16cmの長方形の厚紙があります。

この厚紙の4隅から同じ大きさの正方形を切り取って残りを折り曲げ，ふたのない箱をつくる。

箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の1辺の長さをいくらにしたらよいか。(図A）」



(A)

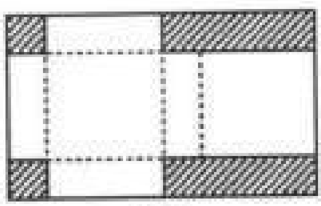
そして期末試験では最後の問題として，この問題の数値だけを変更した問題を出題しました。

でも遠山さんが「生徒の頭の中に数学がある」というのですから，

「この問題と似た問題をつくり，解答しなさい」

という問題を付けくわえてみました。

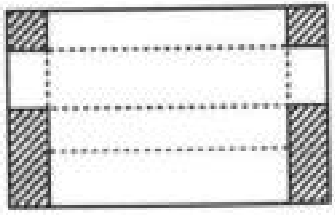
多くの生徒たちは数値だけを変えて新しい問題をつくりましたが，工藤君という生徒が、「ふたのある箱をつくる」として次のような作り方の問題を出題しました（図B)。



(B)

私は驚きました。教師になって10年たちましたが，「ふたのない箱」ばかり授業で扱っていて，「ふたのある箱」は全然扱ってこなかったからです。

次の年の授業では，工藤君の作り方を紹介しました。すると，島田さんが「どうしてこういう風に切らないのですか」と質問したのです（図C)。　　　　　　C



(C)

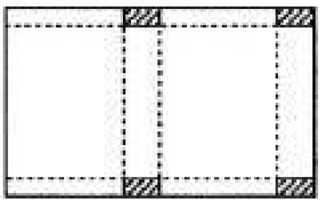
そうすると「工藤型の最大値と，島田型の最大値とどちらが大きいか」という問題が生まれます。

武蔵工業大学の授業では「どう思うか」というアンケートを取りました（2003年9月25日)。

工藤型が大きい	１１名
島田型が大きい	１０名
どちらも同じ	６名

正解は「どちらも同じ」です（式を考えてみればわかります)。「どう思うか

さらに，ダンボールの箱は，次のような作り方です（図D)。



(D)

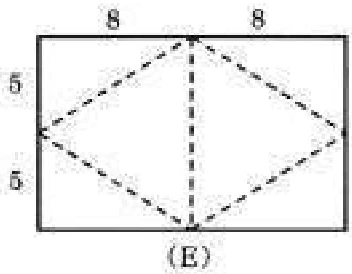
そこで今度は「工藤型の最大値と，ダンボール型の最大値とどちらが大きいか」という問題が生まれます。

今度もアンケートを取りました。

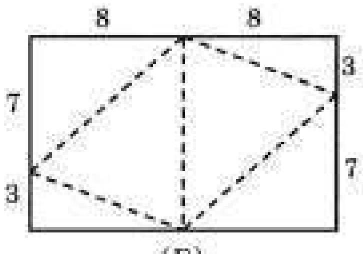
工藤型が大きい	２名
ダンボール型が大きい	５名
どちらも同じ	１０名

計算の結果は，「ダンバール型が大きい」が正解となります。

さらに次のような作り方も考えられます（図E,図F)。



(E)



(F)

こうして「ふたのある箱」の問題は，次々に発展していきました。

（2）[ふたのない箱]　の方も発展がありました。

もとの問題は「たて10ｃｍ，よこ16ｃｍの長方形を（図１）のように切って箱をつくる」問題です。

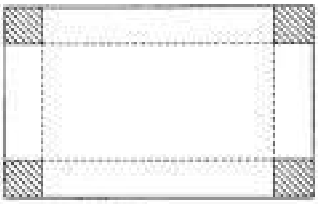


図1

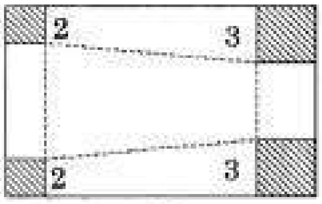


図2

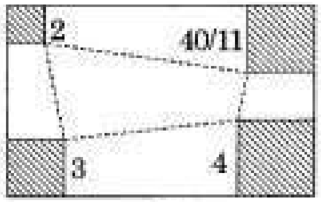


図3

小平養護学校でこの授業をしていたとき，稲毛君が（図2）のような切り方を考えました（1978年)。

これでも「ふたのない箱」といえそうです。

この話を東数教の月例研でしたところ,塩沢宏夫さんが,

「4つの正方形の大きさがすべてちがうような箱も作れるんじゃないだろうか」と発言されました。

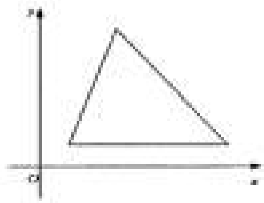
みんなで考えたところ,「3つの正方形の１辺の長さを2㎝,3㎝,4㎝とすると,もう一つの正方形の１辺の長さは40/11㎝となることが　分かりました（図３)。

（3）都立大山高校で非常勤講師をしていた時のことです（1977年)。

授業で，**「3点A(x_1, y_1),B(x_2, y_2),C(x_3, y_3),を頂点とする三角形ABCの重心の座標は……」などの問題を扱ってから「重心についての問題をつくりなさい」という問題を出しました。**

生徒たちの多くは「三角形の頂点の座標が……です。重心の位置を求めなさい」という問題を出題しましたが，飯島さんは次のような問題をつくりました。

「下のような三角形の厚紙でコマをつくりたい。どこに心棒を指すとコマになりますか。」



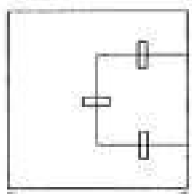
私は「三角形のコマなんかうまく回るのかな」と思いましたが，作ってみると見事に回りました。

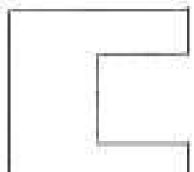
これ以後　重心の問題を，すべてコマの問題に変えました。

また，内分点，外分点の問題も次のようにコマの問題に変えました。

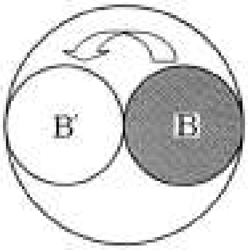
「2点P(6)，Q(9)について，線分ＰＱを
① 1：4 に内分する点を求めよ。
② 1：4 に外分する点を求めよ。」

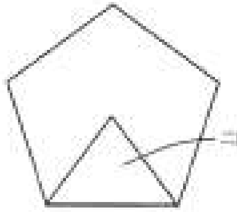
→「下のような厚紙でコマを作りたい。どこに心棒をさしたらよいか。





さらにこのことを使って「コマをつくる」という課題を出したところ，次のようなコマも提出されました。





（4）1998 年の 7 月の期末試験に次の問題を出しました。

「ある店でおにぎりを1個100円で売ると1日に600個売れるが，

1円値上げするごとに4個の割合で売り上げが減ることが今までの経験からわかっているものとする。

1日の売上金額を最大にするにはいくら値上げしたらよいか」」

そして「この問題に似た問題を 1 題作って解答しなさい」という問題を付け加えたところ，

高見君が次のような問題をつくりました。

「お菓子屋さんで草もちを1個100円で売ると1日に700個売れるが，

1円値上げするごとに3割の割合で売り上げ個数が減るという。

1日の売上金額を最大にするにはいくら値上げしたらよいか」

高見君の解答は次の通りです。

「1日の売上金額は，

値上げをしなければ　100×700＝70000

1 円値上げをすると　101×490＝49490

2 円値上げをすると　102×343＝34986

3 円値上げをすると　103×240＝24720

値上げをするとどんどん売り上げが減っていく。

したがって値上げしないほうが良い」

私は 「1円値上げするごとに4個の割合で売り上げが減る」 という条件を

「1円値上げするごとに3割の割合で売り上げ個数が減る」 という条件に変えたという発想に感動しました。

そして，この発想を何とか生かしたいと思いました。

そこで，この条件を次のように変えたらどうなるか，考えてみました。

「1円値下げするごとに3割の割合で売り上げ個数が増えるという。

1日の売上金額を最大にするにはいくら値下げしたらよいか」

この条件で，高見君の問題は，

「x円値下げした時の売上金額をy円とすると，

$y=(100-x)\times(700\times1.3^{x})$　」　という式で表されます。

これを解くと，x＝96のとき，y が最大になることがわかります。

このときの草もち1個の値段は4円。

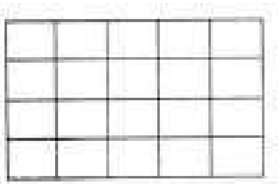
売り上げ個数は約60兆個。売上金額は約240兆円。

こんな荒唐無稽な問題になりました。

（5）1977 年のことです（だいぶ昔のことです）

2 年生の授業で，次のような問題を扱っていました。

「下の図の中に，長方形はいくつあるか。」



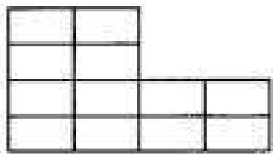
この問題の答えは　${}_6C_2 \times {}_5C_2 = 15 \times 10 = 150$　です。

この問題の次に「この問題に似た問題を 1 題作って解きなさい」という問題を出しました。

多くの生徒は，たて線の本数とよこ線の本数を変えた問題をつくりましたが，

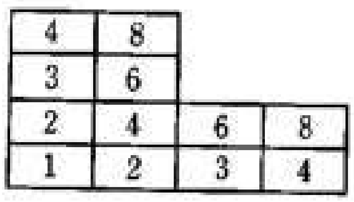
菊池君は次のような問題をつくりました。

「下の図の中に長方形はいくつありますか。」



難問です。

ところが中屋君は次のようにして答えを導きました。



私はびっくりしました。こんな方法で答えが求められるとは！

(私はこれを「菊池の問題　中屋の解法」と呼んでいます。

「菊池の問題　中屋の解法」は　高橋寛著『確率のる・う・る』(三省堂 1977 年初版）に載せてもらいました。）

（6）授業で次の不等式を扱いました（清瀬高校 1988 年)。辻

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

「コーシー・シュワルツの不等式」といわれているものです。

その後，「この不等式を発展させてください」という問題を出しました。

すると　辻さんと宮沢さんが（独立に）次の不等式を考えました。

$$(a^2-b^2)(x^2-y^2) \leqq (ax-by)^2$$

この式も成り立ちます。　　　　　　　(以上で「数学教育法の授業から」を終わります)

（付録）

三角比の定義についての３つの資料　（黒田俊郎　編）

（1）　（『第５回東アジア数学教育会議（EARCOME5 2010 年８月東京）プロシーデング第２巻』より）

三角法を学ぶ意義を理解させる授業

熊倉　啓之　（静岡大学）

梅田　英之（静岡商業高校）

（以下はこの論文の部分的な翻訳です（黒田俊郎訳）

この研究の目的は,三角法を学ぶ意義を明確に，導入時において生徒たちに三角法の意義を理解させる教授法を探求することです。（中略）

１．序文

「なぜ三角法を学ぶのか」

このような疑問を持つ生徒はたくさんいます。

そしてこういう疑問を持った生徒のほとんどは三角法を学ぶ意欲を失い，理解できなくなるでしょう。

この研究の目的は,生徒たちに三角法を学ぶ意義を理解させるための方法を探求することです。

２．方法（略）

３．結果と結論

３．１　三角法を学ぶ意義　（略）

３．２　三角法の導入時の教え方

３．２．１．　サイン・コサイン・タンジェントの定義

sin,　cos,　tan は，通常,辺の長さの比として定義されます（Fig６）。

しかし私たちは sin,　cos を辺の長さで定義することを提案します（Fig７）。

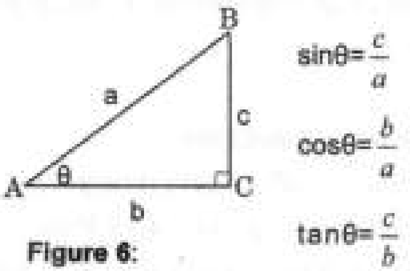


Figure 6:

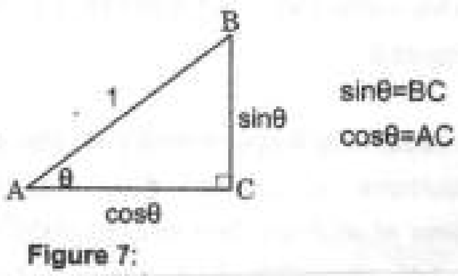


Figure 7:

３．２．２　三角法の導入（略）

３．３　授業

３．３．１　第１の授業

まず，私たちは静岡商業高校の１年生を対象にして授業をしました。

この学校は中程度のレベルの学校で,生徒たちの半数は大学等に進学します。

この授業では，ｓin と cos が比で定義されている教科書を使いました。

３．３．２　第２の授業

つぎに,私たちは同じ学校の１年生のほかのクラスの生徒たちを対象にして授業をしました。

この授業では,教科書を使わずに私たちが作ったプリントを使いました。

私たちは sin と cos の定義として，比による定義を使わずに教えました。

３．３．３．結果

授業が終わってから、生徒たちに次のような質問をしました。

質問１：　三角法の大切さがどの程度わかりましたか。

質問２：　三角法はどの程度理解できましたか。

その結果は次のようでした。

質問１：

	比による定義のクラス（82人）	長さによる定義のクラス（82人）
よくわかった	13%	11%
少しわかった	50%	55%
あまりわからなかった	35%	32%
全然わからなかった	3%	2%

質問２：

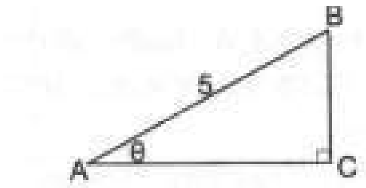
	比による定義のクラス（82 人）	長さによる定義のクラス（82 人）
よく理解できた	6%	8%
少し理解できた	33%	74%
あまり理解できなかった	59%	16%
全然理解できなかった	2%	2%

さらに私たちはそれぞれの授業のあとで,共通のテストを行いました。

以下は問題の一例です。

右のような直角三角形ABCにおいて,

ACとBCの長さを求めよ。



正答率は次の通りです。

.	比による定義のクラス（81人）	長さによる定義のクラス（82人）
ACの長さ	41%	87%
BCの長さ	38%	85%

3．4　結論

この研究によって，私たちは次のような結論を得ました。

（1）三角法を学ぶことの意義は，直角三角形において,辺の長さと角の大きさを正確に表現することです。

（2）sinとcosを「辺の長さ」で定義すると，三角法の意義がわかりやすくなります。

（3）生徒たちにとって,sinとcosを「辺の長さ」で定義したほうが「辺の比」で定義するよりも理解しやすくなります。

（4）三角法を教えるときに，教科書が「辺の長さ」でなく「辺の比」として定義している場合には,自作のプリントで授業をすべきです。

参考文献　（略）

著作権　（略）

2·1 サインとコサイン

2·1·1 サイン，コサイン

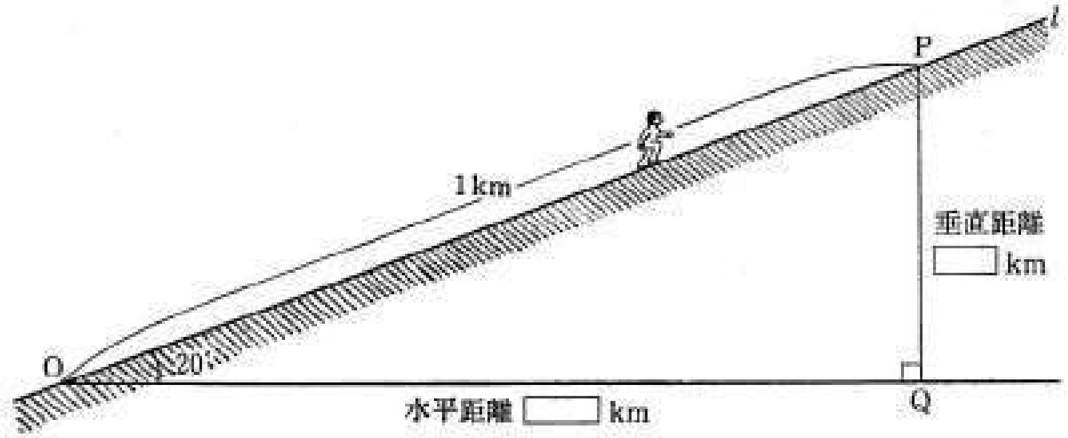


図1　水平距離，垂直距離

図1のように水平の方向との角が20°の斜面lがある．OからPまで1km歩いたところでつぎのことを考えよう．

垂直方向にどのくらい高くなったか．

水平の方向にどのくらい進んだか．

これらは，角20°を正確にとった縮図をかき，ものさしで測っておよその値を求めることができる．

○問1　図1は角20°を正しくとってある．また，1kmを10cmに縮尺してある．ものさしを使って，垂直距離QPおよび水平距離OQを求めよ．

これらの値は，角が与えられれば，その角の大きさに応じて定まる．角が20°の場合は，

斜面の長さ1に対して，垂直距離は約 0.34，水平距離は約 0.94 であることがわかる．このとき，QP，OQ をそれぞれ

$$s=0.34, \quad c=0.94$$

とおくと，斜面の長さが2の場合は垂直距離 $Q'P'=2s$，水平距離 $OQ'=2c$，また斜面の長さが3の場合は，それぞれ $3s$，$3c$ となる．つまり，図2において

$$\frac{QP}{OP}=\frac{Q'P'}{OP'}=\frac{Q''P''}{OP''}=\cdots=s,$$

$$\frac{OQ}{OP}=\frac{OQ'}{OP'}=\frac{OQ''}{OP''}=\cdots=c$$

である．すなわち，角 20° を固定すれば，点Pを斜面上のどこにとっても

$$\frac{QP}{OP}=s=0.34,$$

$$\frac{OQ}{OP}=c=0.94$$

となり，それぞれ一定である．

以上のことをまとめると，20° の斜面では，

斜面の長さ1につき

垂直方向の長さ＝0.34，

斜面の長さ1につき

水平の方向の長さ＝0.94，

と書くことができる．

このことをそれぞれ

$$\sin 20^\circ=0.34, \quad \cos 20^\circ=0.94$$

と表し，*) 左辺は，サイン 20°，コサイン 20° と

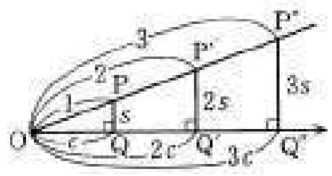


図2 $\frac{s}{1}=\frac{2s}{2}=\frac{3s}{3}$

$\frac{c}{1}=\frac{2c}{2}=\frac{3c}{3}$

図3 $\frac{rs}{r}=s$, $\frac{rc}{r}=c$

*) sin, cos はそれぞれ sine, cosine の略である．

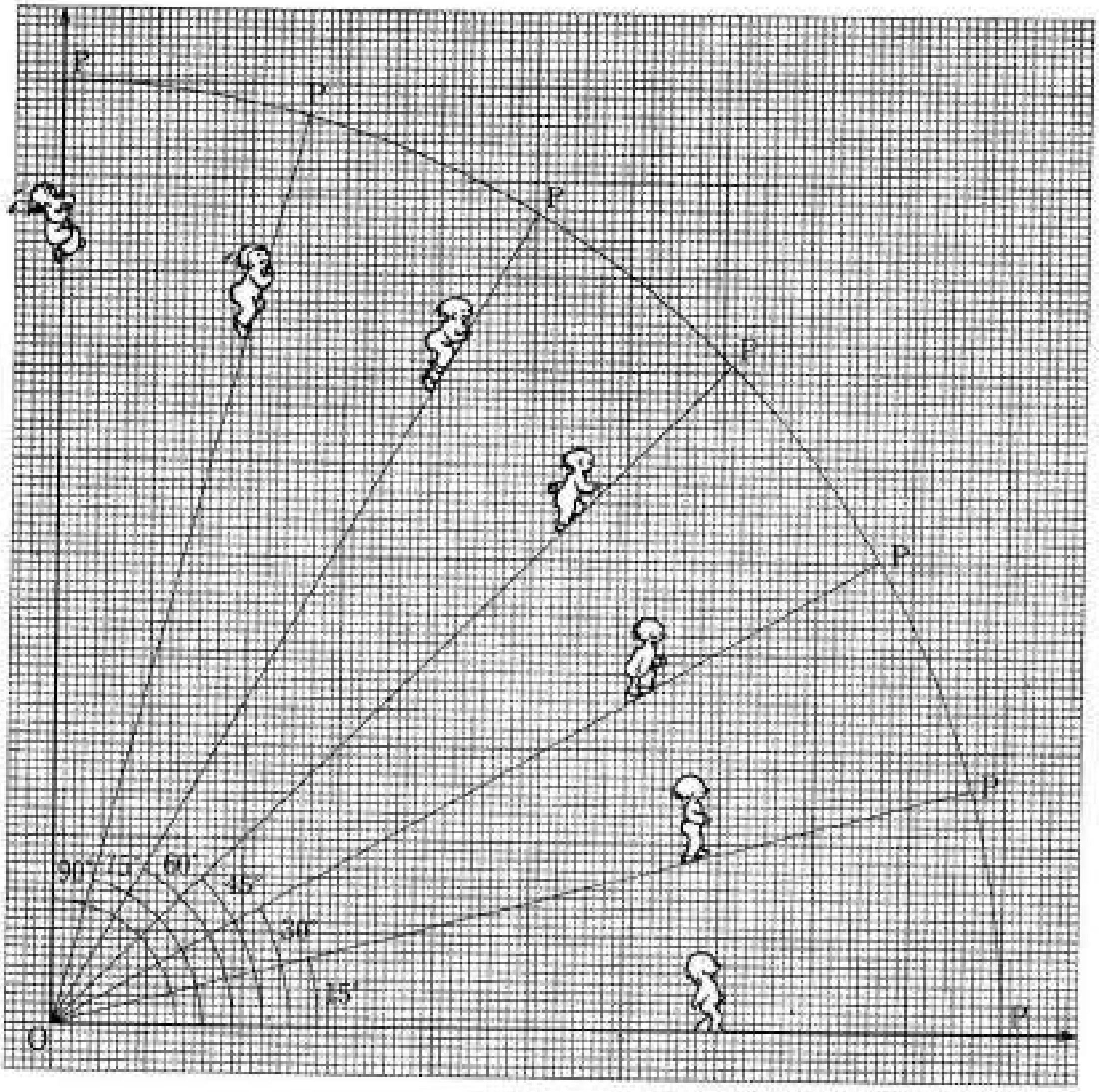
読む．サインは正弦，コサインは余弦と訳されていて，これらを三角比という．

○問 2　下の図を用いて，つぎの各値を求めよ．

① $\begin{cases}\sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ\end{cases}$　② $\begin{cases}\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ\end{cases}$　③ $\begin{cases}\sin 45^\circ \\ \cos 45^\circ\end{cases}$

④ $\begin{cases}\sin 60^\circ \\ \cos 60^\circ\end{cases}$　⑤ $\begin{cases}\sin 75^\circ \\ \cos 75^\circ\end{cases}$　⑥ $\begin{cases}\sin 90^\circ \\ \cos 90^\circ\end{cases}$

⑦ $\begin{cases}\sin 0^\circ \\ \cos 0^\circ\end{cases}$



（1）　この本の指導資料です。（改訂版のものですがこの部分の変更はないと思います。）

『高等学校の数学Ⅰ改訂版　指導資料』　（1985年　三省堂）

3　授業の実際

●三角比の授業

三角関数はむずかしい！

3年ほど前，高校2年生の3学期の最後に小・中・高の数学をふり返るためのアンケートをとったことがある．そのなかに，高校1，2年の教材について解り易かったかどうかを調べるものを入れた．1年の数・式から始めて，方程式，不等式，……といったぐあいに教科書の章の名前をぬき出し，数ⅡBの数列，微積分にいたるまでの各教材について，5段階評価をさせてみた．

集計したところ，ワーストスリーは「論理」，「指数・対数関数」，「三角関数」であり，この3つは他にくらべて解らないと答えた生徒が極端に多かった．

ちなみに，数Ⅱの微分，積分，ベクトル，行列などは解りやすいということで意外と上位を占めていた．

ここでは話を三角比，三角関数にしぼるが，三角関数がワーストスリーに入るかもしれないということは，初めから予想がついた．授業中，sin，cosが出てくると大抵の生徒がイヤーな顔をするからである．早い話が，ぼくの指導がうまくいかなかったのであるが，他の先生方も「ヤリにくいねえ」と答える方が多かった．

三角比の側面と三角関数の側面

この「やりにくさ」にはいろいろ理由が考えられるがその1つに，三角形の辺の比と角の関係を記述するために，sin，cosが使われるという，いわゆる「三角比」としての側面と，回転角を考えて円運動や振動を関数としてとらえるのに，sin，cosが使われるという，いわゆる「三角関数」あるいは「円関数」としての側面が混然としている，ということがあると思う．

これまでの指導要領による教科書でいうと，初めは三角形の話かと思ううちに回転が出てきて関数の話になり，最後は正弦定理，余弦定理という三角形の話にもどって終わる．

	「三角比」の側面	「三角関数」の側面
対　象	三　角　形	円　運　動
角	$0°<\theta<180°$（静的）	$-\infty<\theta<\infty$（動的）
関連定理	正弦定理 余弦定理	$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$ $\|\sin\theta\|\leqq 1$　　など

新課程の教科書では，三角比は「数Ⅰ」へ，三角関数は「基礎解析」あるいは「数Ⅱ」へと分離された．

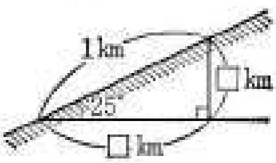
ではこれでうまくいくかというと，必ずしもそうもいえない．なぜならば一時代前（昭和33年版指導要領の頃）にも分離されていた．つまり，中学３年で鋭角の三角比を学び，高校で一般角の三角関数を学ぶ形だった．ところが，当時もずいぶん評判が悪かったのを覚えている．たとえば，「むしろ中学で教えないほうが高校でやりやすい」とか，「いつまでも三角形をひきずっていて関数にならない」とかいわれたものだった．もう少し立ち入っていえば，鋭角の三角比まではよいのだが，これを鈍角に広げるときに座標が必要となり，いきおい関数としての側面に乗り換えて，そのうち元も子もなくなるというような形であったと思う．

三角比の授業

理念的には，一般的な三角関数を扱い，その特殊な場合として三角比を教えることや，極座標で統一的に扱うことも可能な気もするが，ぼくは経験からやはり三角比と三角関数は分離したほうが生徒によく解るように思っていた．ただし問題は，三角比をどう教え，それを三角関数にどう結びつけるかにある．だから長い間「うまくいかないものだ」とただボヤいていた．

ところが３年程前，友人のＫ先生の実践をお聞きしてハッとした．これなら生徒にわかると思った．そこで早速真似をしてみた．

簡単にいうと，右図のように坂道を使うのである．“角が 25° の坂道を 1km のぼったところで考える．水平の方向に何 km 進んだろうか，垂直方向に何 km のぼっただろうか．これらを



水平方向 (25°)＝0.91，垂直方向 (25°)＝0.42

と書くことにしよう．ただし，国際的には

$$\cos 25^\circ = 0.91,\ \sin 25^\circ = 0.42$$

と書いている．”というようなぐあいにやるのである．

おもしろいのは，坂の水平面となす角が 90° を超えると生徒は「オーバーハング」といって納得してくれる．もちろんそのとき，“水平方向は逆に進んでしまうのでマイナスをつけよう”としておくのである．

くわしい内容をここで紹介する余裕はないが，ともかくぼくは教師生活？年，初めて楽しく三角比および現行教科書の三角関数を扱うことができた．

ぼくは以前から，三角比＝「静」，三角関数＝「動」という形でとらえるだけで，「静」の三角形の斜面の上を人間が「動」くというアイデアはわかなかった．だから，実践後の後味も含めてK先生に心の中で感謝している．

一度やってごらんになりませんか？

（小沢健一）

三省堂 数学資料　No.10　1981年

講演者（黒田俊郎）の感想
　話をする機会を「作ってくださってありがとうございました。
久しぶりに「話を構成する」楽しさを味わいました。
大部分は今まで話したことですが
　「学生時代の合宿で清水昭信さんの講義が評判が良かったこと」
　「近数教テキストシリーズが高度だったこと」
　「標準偏差は偏差の二乗平均で　特に奇妙なものではない」
　「3σのカサ」
などは今回初めて話したことだと思います。
　話をしてみて「対数方眼紙の位置づけ」はもう少し考えた方がいいということと「険しい道筋と楽しい道筋との対比」をもう少しはっきりさせた方がよかったかなということを考えました。

矢野　葉子
　黒田先生には、2000 年から津田塾大学同窓会企画の勉強会で教えていただきました。2015 年に企画が打ち切りになったとき、今回参加した松本さんと一緒に「勉強会がなくなるのは困る」と申し出たところ、「自主勉強会にすれば」と言ってくださり、今まで「数学を楽しむ会」として続いています。先生には無償で教えていただいています。
　今回先生の話を聞いて、「そうそう、こんなこともやったな」と次々思い出されました。しっかり心に残っているのは、興味深い内容で、色々工夫がされているからだと思います。黒田先生に出会ってから、数学
がますます楽しくなりました。
　生徒に問題を作らせることによって生徒が理解しているかどうか判定するというお話はその通りだと思います。今、中学校の放課後学習教室でボランティアをしています。教えるのではなく、勉強する場を与えて、わからなかったら質問して、というスタンスの会で、どちらかというと勉強が苦手な生徒がほとんどです。感じていることは、宿題が多すぎて、苦手な生徒はそれをこなすためにやり方だけを覚えようとして、何をしているのか、何のために学習したのかわからないままだということです。問題作りを試してみたいと思いました。資料に載っていた、長方形の数を求める方法のように、もしかしたらこちらが考えもしなかったアイディアを持っているかもしれません。わからない原因に気付くきっかけになるかもしれません。
何か心に残ってほしいのと、計算問題ばかり解いている合間の気分転換に、との思いから、工作や折り紙などを持って行くようにしています。そのアイディアも勉強会から得ています。

鈴木　弓子
　黒田先生講演ありがとうございました。分かりやすく、納得のいくお話でした。でも私には到達目標の中に面白いけれども解き方の分からない問題がいくつもありました。またの機会に教えてください。

先生は「僕の発表は昔とあまり変わってないんですよね。進歩がありません。」とおっしゃっていましたが、それは先生の考え方に一本筋が通っていてそれを貫き通してきたからだと思います。これからも先生のレポートを楽しみにしています。

名雪　順一

黒田さんとは、数教協の東京地区研究会でお会いしたのが初めてだったと思います。その時、以前に読売新聞の教育欄で、「容積最大の箱を作るという微分」の授業を読み、こんな授業があるんだということに感動したの思い出しました。それが黒田さんの執筆でした。それ以来、様々な研究会で黒田さんのレポートを聞き、「三省堂のバイパスシリーズ」、「楽しく分かる数学 100 時間」を参考にさせていただき、授業を創ってきました。生徒に課題として、どの参考書、問題集をやってもらおうかと考える時、バイパスシリーズが最適だと私は考え、それを仕上げてもらっています。

今回の黒田さんの講演を楽しみにしていました。

授業を組み立てることを中心に話されましたが、私は、この話の元の本を読んでおり、それを念頭に授業を創っています。今回、再度そのことを振り返えられ良かったです。

また、質疑で、なぜ、このような授業創り、教育観になったかを聞けて参考になりました。

今後も、黒田さんの実践を参考に授業つくりを考えていこうと思っています。

ありがとうございました。

中山　淳

黒田先生の問題作りは、定期テストなどで、よく使わせていただいております。

この日のお話で印象に残ったのは、先生の大学時代のご友人の勉強方法についてです。到達目標設定を自分の学びに使われていたとのことでした。今日のレジメもその流れで作られていてわかりやすかったです。

私は最近は、自分の学びの中では、このいま取り組んでいる中で何が一番、残るのかなーと考えることです。主に本で学びを進めるのですが、この筆者の
一番に言いたいことがだいたいに残るのですが、中には強烈なワンフレーズであったり、ワンセンテンスでもあったりします。

発表された先生方の紹介された本もいくつか購入をしてみようと考えています。
ありがとうございました。