Ｉ部：常用対数の授業

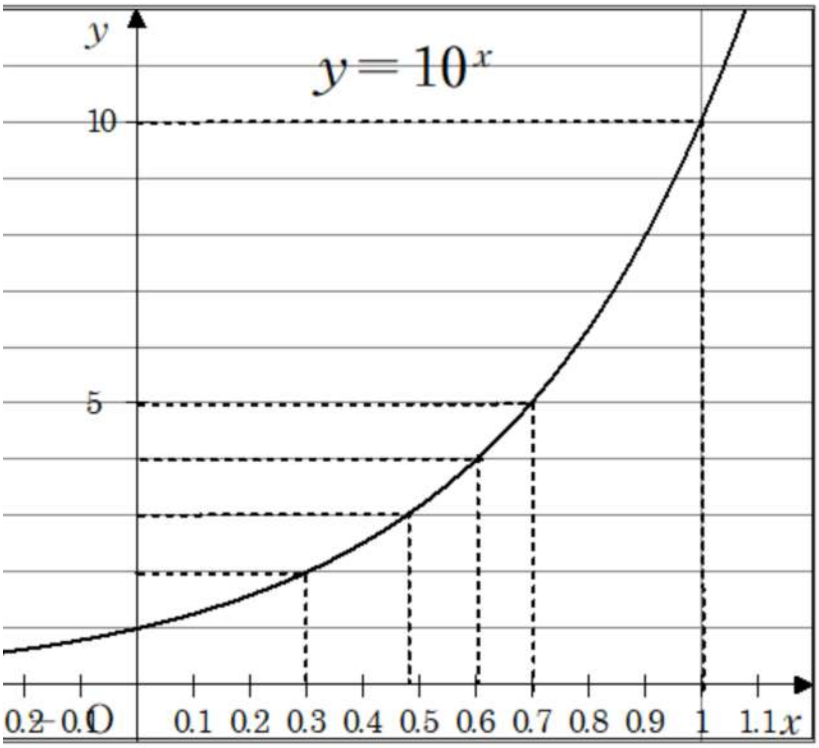
草彅浩二
k_kusanagi@ac.cyberhome.ne.jp

１．はじめに

かつては、対数無用論というのがありましたが、現実に対数の記号を使って表現されているものがあるのは事実なので、一切扱わないとか、記号を使用しないというのは難しいと思います。
現実社会では、水素イオン濃度の pH＝－log〔H^+〕とか、地震の大きさを地震計の振幅Ａを用いて、Ｍ＝log Ａ ＋ Ｂ（Ｂは補正項）など、目立ったりはしませんが、使われています。

２．対数の登場

今まで、指数関数を学習してきました。それで、指数関数のグラフを学びました。その指数関数のグラフを示します。底を10とする指数関数のグラフです。



では、このグラフを読み取って、ｙ＝２になるｘの値を読み取ってください。それは、10^xが２になるｘの値のことです。

自分の答え：

次に、ｙ＝３になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが３になる値のことです。

自分の答え：

ｙ＝４になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが４になる値のことです。

自分の答え：

ｙ＝５になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが５になる値のことです。

自分の答え：

線は引いてありませんが、自分で線を引いて、ｙ＝６になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが６になる値のことです。

自分の答え：

同じく、自分で線を引いて、ｙ＝７になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが７になる値のことです。

自分の答え：

同じく、自分で線を引いて、ｙ＝８になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが８になる値のことです。

自分の答え：

同じく、自分で線を引いて、ｙ＝９になるｘの値を読み取ってください。それは10^xが９になる値のことです。

自分の答え：

出来ましたか？　それでは、簡単な確認をしてみましょう。

変な計算と思うかも知れませんが、おつきあいください。

まず、２に２をかけていきましょう。$2^2=4$、$2^3=8$、$2^4=16$、$2^5=32$、$2^6=64$、$2^7=128$、$2^8=256$、$2^9=512$、$2^{10}=1024$、‥‥となりますね。
ここで、1024は、ほぼ1000と考えてもいいですね。2%程度の誤差です。すると、$2^{10}=1000=10^3$となります。
これから $2^{10}=10^3$, $(2^{10})^{\frac{1}{10}}=(10^3)^{\frac{1}{10}}$, $2=10^{0.3}$ となります。

次に、３に３をかけていきましょう。$3^2=9$、$3^3=27$、$3^4=81$、$3^5=243$、$3^6=729$、‥‥となりますが、10^nに近い形になりません。そこで、$3^4=81$ の 81 を80としてみましょう。
すると $3^4=80=8\times10=2^3\times10=(10^{0.3})^3\times10=10^{0.9}\times10=10^{1.9}$ で、$(3^4)^{\frac{1}{4}}=(10^{1.9})^{\frac{1}{4}}$, $3=10^{0.48}$ となります。

４は2^2だから、$4=2^2=(10^{0.3})^2=10^{0.6}$ ですね。

５は10÷２になるので $5=\dfrac{10}{2}=\dfrac{10}{10^{0.3}}=10^{0.7}$ となります。

６は２×３だから、$6=2\times3=10^{0.3}\times10^{0.48}=10^{0.78}$ です。

７に７をかけると、$7^2=49$、$7^3=343$、$7^4=2401$、$7^5=16807$、$7^6=117649$、‥‥と、これも10^nに近い値になりませんが、49 を 50 として考えてみましょう。
すると $7^2=50=5\times10=10^{0.7}\times10=10^{1.7}$, $(7^2)^{\frac{1}{2}}=(10^{1.7})^{\frac{1}{2}}$, $7=10^{0.85}$ となります。

８は2^3だから、$8=2^3=(10^{0.3})^3=10^{0.9}$ です

９は3^2だから $9=3^2=(10^{0.475})^2=10^{0.95}$ です。

ところで、□は10の何乗ですか、その指数を表す記号があります。それは、$\log_{10}□$ で、「□の10を底とする対数」と言ったりします。今の結果を書き並べて見ます。

$$2=10^{0.3} \iff \log_{10}2=0.3 \quad , \quad 3=10^{0.48} \iff \log_{10}3=0.48$$

$$4=10^{0.6} \iff \log_{10}4=0.6 \quad , \quad 5=10^{0.7} \iff \log_{10}5=0.7$$

$$6=10^{0.78} \iff \log_{10}6=0.78 \quad , \quad 7=10^{0.85} \iff \log_{10}7=0.85$$

$$8=10^{0.9} \iff \log_{10}8=0.9 \quad , \quad 9=10^{0.95} \iff \log_{10}9=0.95$$

さらに、

$$1=10^0 \iff \log_{10}1=0 \quad , \quad 10=10^1 \iff \log_{10}10=1$$

となります。

この底を10とする対数を「常用対数」と呼んで、三角関数表のような細かな数表(常用対数表)があります。この表の使い方を説明します。
$\log_{10}□$ の値の一覧ですが、□の値は1.00から9.99までの値が小数点第４位までの数値が記載されています。
例えば、$\log_{10}1.23$ の値を求めます。「1.23」の「1.2」までを左側の欄から捜します。小数点第２位の「3」」は一番上の段から選び、それが交叉するところに「.0899」とあります。これは小数点以下の数値なので、「0.0899」のことで、
$\log_{10}1.23=0.0899$ です。
それでは、$\log_{10}1.54$ の値を捜してみましょう。

数	0	1	2	3	4	5
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903

自分の答え：

「0.1875」ですね。これは常用対数表の一部です。全体を次のページに掲載します。今し方、求めた値がどれくらい正確か、調べてみましょう。

常用対数表 (1)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

$\log_{10}\pi = 0.4971$,　$\log_{10}2\pi = 0.7982$

常用対数表 (2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

いかがですか。$\log_{10}2 = 0.3010$　,　$\log_{10}3 = 0.4771$　,　$\log_{10}4 = 0.6021$　,　$\log_{10}5 = 0.6990$
$\log_{10}6 = 0.7782$　,　$\log_{10}7 = 0.8451$　,　$\log_{10}8 = 0.9031$　,　$\log_{10}9 = 0.9542$
となるので、かなりいい値だったと思います。

３．対数の計算法則

ここまで進んでいくと、指数の計算法則と同じように対数にも計算法則があるように思われます。
例えば、

$$\log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.30 + 0.48 = 0.78 = \log_{10}6 = \log_{10}(2\times3)$$

$$\log_{10}6 - \log_{10}3 = 0.78 - 0.48 = 0.3 = \log_{10}2 = \log_{10}(6\div3)$$

$$\log_{10}8 = 0.9 = 3\times0.3 = 3\times\log_{10}2 = \log_{10}2^3$$

となっていそうです。このことは、指数の計算法則から導くことができ、教科書に書かれています。また、その説明以外にもいろいろあるようです。２と３とかを使わないで、

$$\log_{10}M + \log_{10}N = \log_{10}(M\times N)\quad,\quad \log_{10}M - \log_{10}N = \log_{10}(M\div N)\quad,\quad \log_{10}M^r = r\times\log_{10}M$$

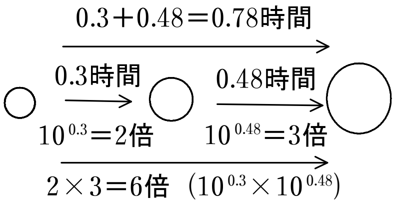
となります。また、次のことも大切ですね。

$$1 = 10^0 \iff \log_{10}1 = 0\quad,\quad 10 = 10^1 \iff \log_{10}10 = 1$$

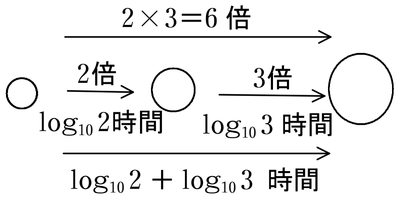
例えば、指数を学習する際に、「一定の時間で一定の倍率で変化する現象があります。それを等倍変化といい

ます。その等倍変化で、1時間でa倍になるものがあり、それがx時間後にはa^x倍になります。これが成り立つように、指数を拡張していきました。」としてきました。対数は、「1時間でa倍になるものがあり、それがx倍になるのに$\log_a x$は時間かかります。」ということが出来ますね。

つまり、1時間で10倍に変化するものを考えます(実際に1時間で10倍に変化するものはあるかどうかは別です)。そのときに、0.3時間では$10^{0.3}=2$倍になり、さらに0.48時間では$10^{0.48}=3$倍になりますが、続けて起これば、時間は足し算で、0.3(時間)+0.48(時間)=0.78(時間)ですが、何倍になったのかというと、かけ算で、$10^{0.3}\times10^{0.48}=2(倍)\times3(倍)=10^{0.3+0.48}=6(倍)$になります。このことはいいですか。



そのことを、『倍』からみると、そのものが2倍になるのには$\log_{10}2=0.3$時間かかり、3倍になるなるには $\log_{10}3=0.48$時間かかりますが、それが続けて起これば、倍はかけ算で、2(倍)×3(倍)=6(倍)になりますが、時間は足し算で、0.3(時間)+0.48(時間)=0.78(時間)かかかります。そのことを記号を使って表すと、$\log_{10}2+\log_{10}3=\log_{10}2\times3=\log_{10}6$ となります。



4．対数の値を求める

常用対数表では、1.00から9.99までしか載っていませんでしたが、実はこの性質があるから大丈夫なのです。その幾つかの例を紹介しまします。と言っても、元々の表が1.00～9.99なので3桁までの値しか求めることが出来ません

まずは、大きな数から、

$$\log_{10}123000=\log_{10}(1.23\times100000)=\log_{10}1.23+\log_{10}100000$$

$$=0.0899+\log_{10}10^5=0.0899+5\times\log_{10}10=0.0899+5\times1=5.0899$$

小さな数でも、

$$\log_{10}0.00123=\log_{10}(1.23\times0.001)=\log_{10}1.23+\log_{10}0.001$$

$$=0.0899+\log_{10}10^{-3}=0.0899+(-3)\times\log_{10}10=-2.9101$$

となります。

では、次の数値を求めて下さい。

① $\log_{10}15.4$　② $\log_{10}15400000$　③ $\log\ 0.154$　④ $\log_{10}0.0000154$

自分の答え　：　①　②　③　④

結構やっかいですね。落ち着いてやってみると、①は1.875、②は7.1875、③は-0.8125、④は-4.8125 です。

常用対数表は1.00～9.99の値に対してでしたが、4桁や5桁と桁数が多い場合はどうしたらいいでしょうか。これも $\log_{10}10=1$ となることを利用して、四則演算が出来る電卓で、××==・・・・という操作を使って求めることが出来ます。

例えば、$\log_{10}3.012$ の値を求めてみましょう。

① 3.012の2乗は、電卓に「3.012」と入力して「××=」で「9.072144」と表示されます。さらに「=」で3乗になって、27.325298」と表示されます。電卓は8桁表示なので、先の方は無視してください。10を超えたので、

$$\log_{10}3.012=\frac{1}{3}\log_{10}3.012^3=\frac{1}{3}\log_{10}27.325298=\frac{1}{3}\log\left(10\times\frac{27.325298}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(\log_{10}10+\log_{10}2.7325298)=\frac{1}{3}(1+\log\ 2.7325298)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_{10}2.7325298$$

です。

② 2.7325298の２乗は「7.466719」、10を超えていないので３乗して「20.403032」。10を超えたので、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_{10}2.7325298 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\log\ 2.7325298^3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}\log_{10}20.403032$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}\log\ (10\times 2.0403032) = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}(1 + \log\ 2.0403032) = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\log_{10}2.0403032$$

③ 2.0403032の２乗は「4.1628371」、３乗すると「8.49345」、４乗するると「17.329213」で10を超えたので、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\log_{10}2.0403032 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}\log_{10}2.0403032^4$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\log_{10}17.329213 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\log_{10}(10\times 1.7329213) = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\log_{10}1.7329213$$

④ 1.7329213の２乗は「3.0030163」、３乗は「5.2039909」、４乗は「9.0181067」、５乗は「15.627669」と10を超えたので、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\log_{10}1.7329213 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{5}\log_{10}1.7329213^5$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}\log_{10}15.627669 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}\log_{10}(10\times 1.5627669)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}(1+\log_{10}1.5627669) = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{180}\log_{10}1.5627669$$

⑤ 1.5627669の２乗は「2.4422404」、３乗は「3.8166524」、４乗は「5.9645381」、５乗は「9.3211827」、６乗は「14.566836」、10を超えたので、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{180}\log_{10}1.5627669 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{180}\times\frac{1}{6}\log\ 1.5627669^6$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}\log_{10}14.566836 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}\log_{10}(10\times 1.4566836)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{1080}\log_{10}1.4566836$$

⑥ 1.4566836の２乗は「2.1219271」、３乗は「3.0909763」、４乗は「4.5025744」、５乗は「6.5588262」、６乗は「9.5541344」、７乗は「13.917351」、10を超えたので、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{1080}\log_{10}1.4566836 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{1080}\times\frac{1}{7}\log_{10}1.4566836^7$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}\log_{10}13.917352 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}\log\ (10\times 1.3917352\ )$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{7560}\log_{10}1.3917352$$

⑦ 1.3917352を２乗は「1.9369269」、３乗は「2.6956893」、４乗は「3.7516857」、５乗は「5.221353」、６乗は「7.2667408」、７乗は「10.113379」、10を超えたから、

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{7560}\log_{10}1.3917352 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{7560}\times\frac{1}{7}\log\ 1.3917352^7$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{52920}\log_{10}10.113379 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7520}+\frac{1}{52920}\log_{10}(10\times 1.0113379)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{52920}+\frac{1}{52920}\log_{10}1.011379$$

⑧ これを小数で表していくと、$\log_{10}3.012 = 0.4788543\cdots$ と求まりました。７つの分数の値の和ですが、７項目を見る限り、小数点第５位までは正しいでしょう。

$$\log_{10}3.012 = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{180}+\frac{1}{1080}+\frac{1}{7560}+\frac{1}{52920}+\frac{1}{52920}\log_{10}1.011379$$

$$\begin{aligned}
&= 0.3333333\cdots\\
&\quad +0.1111111\cdots\\
&\quad +0.0277777\cdots\\
&\quad +0.0055555\cdots\\
&\quad +0.0009259\cdots\\
&\quad +0.0001322\cdots\\
&\quad +0.0000188\cdots\\
&= 0.4788543\cdots
\end{aligned}$$

関数電卓で確認すると、「0.4788549」でした。みんなが関数電卓を持つようになれば、こんなことは無用ですね。

この方法を繰り返し続けていけば、必要な精度で求める事が出来ます。

また、常用対数表や関数電卓がない場合には使えますね。例えば、$\log_{10}2$ の値は次の様になります。

$$\log_{10}2 = \frac{1}{4}\log_{10}2^4 = \frac{1}{4}\log_{10}16 = \frac{1}{4}\left(1 + \log_{10}\frac{16}{10}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_{10}1.6$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\log_{10}1.6^5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\log_{10}10.48576 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\left(1 + \log_{10}\frac{10.48576}{10}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\log_{10}1.048576$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\times\frac{1}{49}\log_{10}1.048576^{49} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{980}\log_{10}10.218702$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{980}\left(1 + \log_{10}\frac{10.218702}{10}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{980} + \frac{1}{980}\log_{10}1.0218702$$

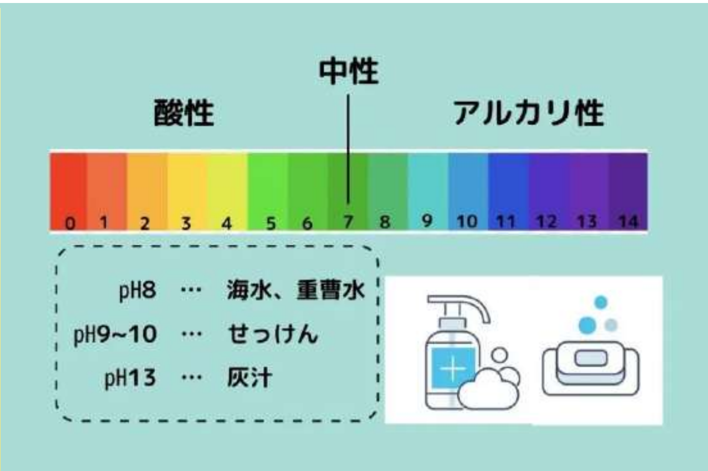
$$= 0.25 + 0.05 + 0.0010204\cdots + \cdots = 0.30$$

５．常用対数の利用

（１）アルカリ性と酸性

　理科の授業で、ある水溶液が酸性かアルカリ性かを調べるときに、赤色のリトマス紙に付けて青くなればアルカリ性で、青色のリトマス紙につけて赤くなれば酸性です、ということは習いました。また、フェノールフタレイン溶液が赤色になればアルカリ性だということが分かります。BTB 溶液を数滴たらして、青色になればアルカリ性で、黄色になれば酸性で、緑色になれば中性ということが分かります。

　アルカリ性と酸性の目安になるのが、＜$pH = -\log[H^+]$＞で、『水素イオン濃度』と呼ばれています。水溶液の水分子 H_2Oはごく僅かが電離して、水素イオンと水酸基イオンになります。水素イオン濃度と水酸基イオン濃度の積は25℃のときに、1.0×10^{-14} (mol/l)となります。すると、中性のときは水素イオン濃度と水酸基イオン濃度が等しいので、〔H+〕＝1.0×10^{-7} なので、pH＝７になります。
　ｐＨの無安は、



です。

　では、簡単な問題を考えましょう。

(1)　0.001(mol/L)の塩酸のｐＨを求めなさい。
　塩酸の電離度は１とします。

　　自分の答え：

(2) 0.01(mol/L)の水酸化ナトリウムのｐＨを求めなさい。
　水酸化ナトリウムの電離度は１とし、25℃の水溶液では〔H^+〕〔OH^-〕＝$1.0\times10^{-14}(\text{mol/L})^2$ とします

　　自分の答え：

　出来ましたか。答えは(1)は〔H^+〕＝10^{-3}(mol/L)だから、ｐＨ＝３です。(2)は〔OH^-〕＝10^{-2}(mol/L)だから、〔H^+〕＝10^{-12}(mol/L)になるので、ｐＨ＝12。

　25℃のときの水のイオン積は 1.0×10^{-14}(mol/L)２ ^{と}と書きましたが、水の電離は吸熱反応で、$H_2O = H^+ + OH^- - 56.5KJ$ です。だから温度が高くなると、この平行は右側に偏るので、水のイオン積は大きくなります。

（２）地震の震度とマグニチュード

地震の震度は、０，１、２、３、４，５弱、５強、６弱、６強、７ の10段階に分れていて、その場所の「ゆれ」を表すものです。かつては、体感や周囲の状況から推定していましたが、1996年４月から計測震度計で自動的に観測して通報をしています。

地震が起こると、震度〇の地域は‥‥‥という報道がありますね。震源から遠ければ小さくなるように思われがちですが、地殻の構造などで一概にはいえません。だから、地震が起こると「最大震度」という表現があります。震度だけで地震の大きさを比較するのは難しいです。

そこで、アメリカの地震学者のリヒターが1935年にローカルマグニチュードを提唱しました。それは、震央から100km離れた地点での特定の地震計(ウッド･アンダーソン地震計)の最大振幅をμm単位での数値の常用対数の値を「ローカル･マグニチュード(リヒタースケール)」といいます。その後、実態波マグニチュード、表面波マグニチュード、モーメントマグニチュードなどが開発されてましたが、ローカルマグニチュードとほぼ同等の値を示すように作られているそうです。

「１．はじめに」に「地震の大きさを地震計の振幅Ａを用いて、Ｍ＝logＡ ＋ Ｂ（Ｂは補正項)」と書いたのは、常に震央から100kmの地点にその地震計があるとは限らないので距離の補正が必要になるし、地震計の違いによる補正なども必要になるので、補正項を加えました。

それで、地震のマグニチュードＭと地震の発するエネルギーＥの関係を調べたら、次式になりました。

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times M$$

例えば、マグニチュード５の地震が発するエネルギーは、

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 6 = 13.8$$

$$\therefore\ E = 10^{13.8} = 10^{0.8} \times 10^{13} = 6.31 \times 10^{13} (J)$$

です。$10^{0.8}$の値は、常用対数表の中から0.8の値を探します。表の中に「.8000」がありました。その左側を見ると「6.3」の値があり、小数点第2位は上を見て「1」があるので、$10^{0.8}=6.31$と分かります。

このように、常用対数表の使い方として、10^{x}の値を読み取ることが出来るのです。

常用対数表(2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189

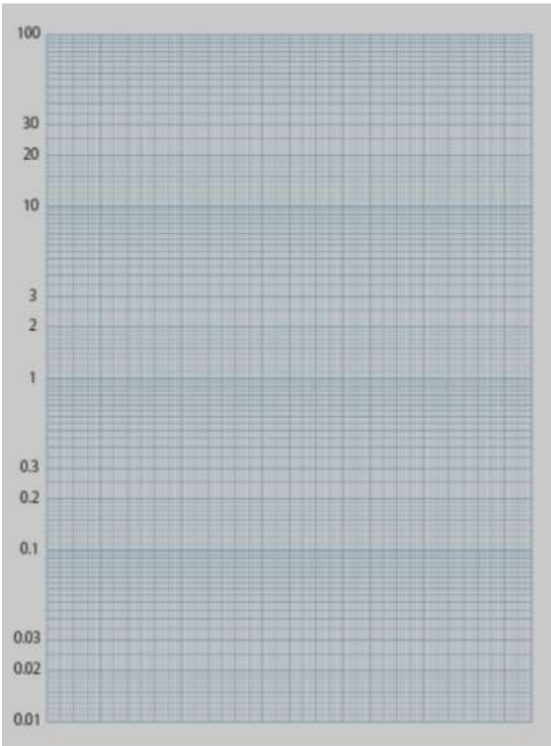
では、問題です。

2024年の１月１日の16:10頃に起きた能登半島地震の最大震度は7で、マグニチュードは7.6でした。この地震の発するエネルギーはいくらですか。

自分の答え：

うまく常用対数表を使えましたか。1.58×10^{16}(J)ですね。

（３）対数グラフ用紙



普通のグラフ用紙(方眼紙)は、目盛りが等間隔になっています。だから、変化の大きなものを表そうとすると、グラフ用紙からはみ出してしまうことがあり、困ったことがありませんか。

そういうときに、常用対数を使うと、0.01は－２で、0.1は－１で、1は０で、10は１で、100は２で、1000は３で、10000は４になります。これを目盛りにしたものが「対数目盛」です。0.01～10000を－２～４で表すことができ、変化を表すことが出来ます。

実際に対数グラフ用紙というものが存在します。また、エクセルなどの表計算ソフトでグラフ(散布図)を作成した際に、縦軸や横軸を対数目盛にすることが出来ます。

大きな範囲を表すことが出来る以外に、驚くべきことがあります。それは・・・・$\log_{10}y = a\times\log_{10}x + b$

縦軸と横軸を対数目盛にした場合に、グラフが直線状になった場合は、それは冪関数の関係にあることが分かります。
直線の傾きがｘのベキ乗を表すことが右図で分かりますね。

$$\begin{aligned} y &= 10^{a\times\log_{10}x + b} \\ &= 10^{a\times\log_{10}x} \times 10^b \\ &= (10^{\log_{10}x})^a \times 10^b \\ &= x^a \times 10^b \\ &= B\times x^a \qquad B=10^b \end{aligned}$$

縦軸だけを対数目盛にした場合に、グラフが直線状になった場合は、それは指数関数の関係にあることが分かります。
直線の傾きが、指数関数の底に関係することが右図で分かりますね。

$\log_{10}y = ax + b$

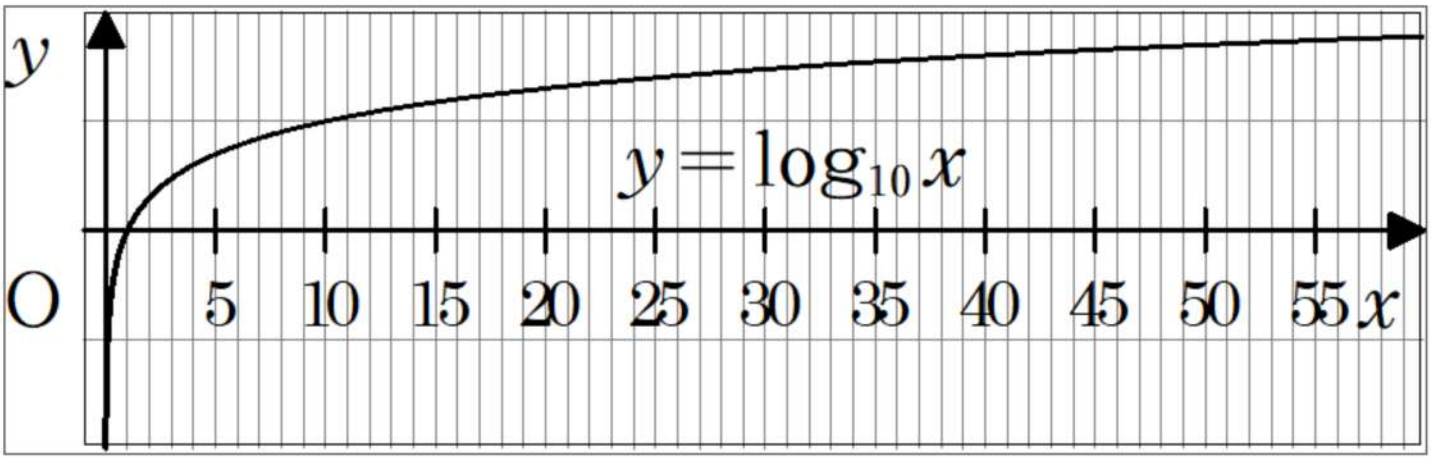
$$\begin{aligned} y &= 10^{ax+b} \\ &= 10^{ax} \times 10^b \\ &= (10^a)^x \times 10^b \\ &= B\times A^x \end{aligned}$$

ただし $A=10^a$, $B=10^b$

横軸だけを対数目盛にした場合に、グラフが直線状になった場合は、それは対数関数になっていいます。それは、$y = a\times\log_{10}x + b$ だから当たり前ですね。

６．常用対数のグラフ

では、$y = \log_{10}x$ のグラフを描いて見ましょう。縦軸と横軸は等間隔ですが、縦軸は横軸の5倍にしてあります。
このグラフを横軸を対数目盛にすると、直線になります。何となく不思議ですね。



７．Ｉ部のおわりに

この話しは底を10とする指数から始まり、10を底とする対数についての話しでした。10を底とする対数は「常用対数」といい、あまり目にすることは少ないと思いますが、日常に使われています。

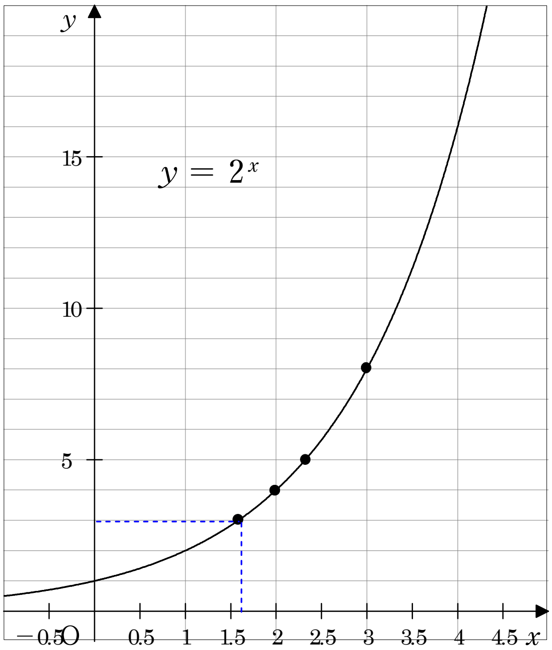
でも、底が10だけと限ったわけではありません。２や３などを底とした指数に対して、２や３を底とした対数もあります。これらも、ここでの話しと同じように展開がされますが、常用対数表のようなものはないし、日常に使われているということもないようです。ただ、底が異なる対数が出てくるので、「底の変換公式」というものが登場します。

Ⅱ部：常用対数でない対数の授業

草彅浩二
k_kusanagi@ac.cyberhome.ne.jp

１．指数関数のグラフから

　まず、底を２とする指数関数$y = 2^x$　のグラフを考えましょう。



　このグラフを読み取って、ｙ＝３になるｘの値を読み取ってください。それは、2^xが３になるｘの値のことです。

　　　自分の答え：

　次に、ｙ＝４になるｘの値を読み取ってください。それは2^xが４になる値のことです。

　　　自分の答え：

　ｙ＝５になるｘの値を読み取ってください。それは2^xが５になる値のことです。

　　　自分の答え：

　ｙ＝８になるｘの値を読み取ってください。それは2^xが８になる値のことです。

　　　自分の答え：

　グラフから読み取ったことを底が10の場合の常用対数と同じように、底が２の場合の対数の記号 $\log_2\square$ を使って表してみましょう。

　　　$2^x = 3$　→　ｘ＝1.6　　だから　$\log_2 3 = 1.6$
　　　$2^x = 4$　→　ｘ＝2.0　　だから　$\log_2 4 = 2.0$
　　　$2^x = 5$　→　ｘ＝2.3　　だから　$\log_2 5 = 2.3$
　　　$2^x = 8$　→　ｘ＝3.0　　だから　$\log_2 8 = 3.0$

ですね。

　このことを確認してみましょう。$2 = 10^{0.3}$、$3 = 10^{0.48}$だったので、
$2^x = 3$　→　$(10^{0.3})^x = 10^{0.48}$　　$10^{0.3x} = 10^{0.48}$　　$0.3x = 0.48$　　$x = 1.6$　となります。

　同じように、$2 = 10^{0.3}$、$4 = 10^{0.6}$だったので、
$2^x = 4$　→　$(10^{0.3})^x = 10^{0.6}$　　$10^{0.3x} = 10^{0.6}$　　$0.3x = 0.6$　　$x = 2.0$　となります。

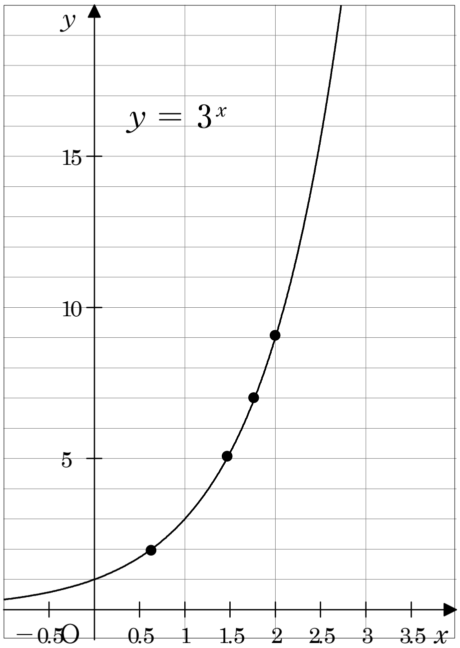
　同じように、$2 = 10^{0.3}$、$5 = 10^{0.7}$だったので、
$2^x = 5$　→　$(10^{0.3})^x = 10^{0.7}$　　$10^{0.3x} = 10^{0.6}$　　$0.3x = 0.7$　　$x = 2.3$　となります。

　同じように、$2 = 10^{0.3}$、$8 = 10^{0.9}$だったので、
$2^x = 8$　→　$(10^{0.3})^x = 10^{0.9}$　　$10^{0.3x} = 10^{0.9}$　　$0.3x = 0.9$　　$x = 3.0$　となります。

　また、2^nを考えると、1、2、4、8、16、32、64、128、256、512、1024、2048、4096、8192、16384、32768、65536、131072、262144、524288、1048576、････ になります。取敢えず２の20乗まで書き並べました。
　では、3^nは、1、3、9，27、81、243、729、2187、6561、19683、59049、177147、531441、1594323、････ と３の13乗まで書き並べて見るて、近い値を捜すと、2^7の256と3^5の243くらいですね。大胆にそれをイコールとして、$3^5 = 2^8 \quad \therefore\ (3^5)^{\frac{1}{5}} = (2^8)^{\frac{1}{5}}$　，$3 = 2^{\frac{8}{5}} = 2^{1.6} \quad \therefore\ \log_2 3 = 1.6$
とも出来ますね。
　同じように。５ｎを考えて、1，5，25、125、625、3125、15625、78125、390625、1953125、････と書き並べて、近い値を捜すと、2^7の128る5^3の125なので、それをイコールとすると、

となります。$5^3 = 2^7 \quad \therefore\ (5^3)^{\frac{1}{3}} = (2^7)^{\frac{1}{3}}$　，$5 = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2.3} \quad \therefore\ \log_2 5 = 2.3$

次に、底を３とする指数関数$y=3^x$　のグラフを考えましょう。



このグラフを読み取って、ｙ＝２になるｘの値を読み取ってください。それは、3^xが２になるｘの値のことです。

自分の答え：

次に、ｙ＝５になるｘの値を読み取ってください。それは3^xが５になる値のことです。

自分の答え：

ｙ＝７になるｘの値を読み取ってください。それは3^xが７になる値のことです。

自分の答え：

ｙ＝９になるｘの値を読み取ってください。それは3^xが９になる値のことです。

自分の答え：

グラフから読み取ったことを底が10の場合の常用対数と同じように、底が３の場合の対数の記号 $\log_3\square$ を使って表してみましょう。

$3^x=2$　→　ｘ＝0.6　　だから　$\log_3 2=0.6$
$3^x=5$　→　ｘ＝1.5　　だから　$\log_3 5=1.5$
$3^x=7$　→　ｘ＝1.8　　だから　$\log_3 7=1.8$
$3^x=9$　→　ｘ＝2.0　　だから　$\log_3 9=2.0$

ですね。

このことを確認してみましょう。$3=10^{0.48}$、$2=10^{0.3}$ だったので、
$3^x=2$　→　$(10^{0.488})^x=10^{0.3}$　　$10^{0.483x}=10^{0.3}$　　$0.48x=0.3$　　$x=0.6$　　となります。

同じように、$4=10^{0.48}$、$5=10^{0.7}$だったので、
$3^x=5$　→　$(10^{0.48x}=10^{0.7}$　　$10^{0.48x}=10^{0.7}$　　$0.48x=0.7$　　$x=1.5$　　となります。

同じように、$3=10^{0.48}$、$7=10^{0.85}$だったので、
$3^x=7$　→　$(10^{0.48})^x=10^{0.85}$　　$10^{0.48x}=10^{0.85}$　　$0.48x=0.85$　　$x=1.8$　　となります。

同じように、$3=10^{0.48}$、$9=10^{0.95}$だったので、
$3^x=9$　→　$(10^{0.48})^x=10^{0.95}$　　$10^{0.48x}=10^{0.95}$　　$0.48x=0.95$　　$x=2.0$　　となります。

先ほどの　$2^8=3^5$　として、$(2^8)^{\frac{1}{8}}=(3^5)^{\frac{1}{8}}$　$2=3^{\frac{5}{8}}=3^{0.6}$　$\therefore\ \log_3 2=0.6$　となりますね。

また、$5^2=25$、$3^3=27$なので、$5^2=3^3$として、$(5^2)^{\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{2}}$　$5=3^{\frac{3}{2}}=3^{1.5}$　$\therefore\ \log_3 5=1.5$ となります。

２．底が10でなくても・・・・

常用対数の場合と同じように、対数には、次の様な法則があります。

$$\log_a M+\log_a N=\log_a(M\times N)\quad,\quad \log_a M-\log_a N=\log_a(M\div N)\quad,\quad \log_a M^r=r\times\log_a M$$

となります。また、次のことも大切ですね。

$$1=a^0 \iff \log_a 1=0\quad,\quad a=a^1 \iff \log_a a=1$$

３．対数の値を求める

底が10の場合は常用対数表で、対数の値を求めることが出来ましたが、それ以外の底の場合は表がありません。でも、Ⅰ部の４で行ったように、、

$$\log_a M = \frac{1}{r}\log_a M^r = \frac{1}{r}\left(\log_a a + \log_a \frac{M^r}{a}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\log_a \frac{M^r}{a}$$

を使って求める事が出来ます。

$$\log_3 2 = \frac{1}{2}\log_3 2^2 = \frac{1}{2}\log_3 4 = \frac{1}{2}\log_3\left(3\times\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\log_3 3+\log_3\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}(1 + \log_3 1.3333333)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_3 1.3333333 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\log_3 1.3333333^4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}\log_3 3.1604938 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\log_3 1.0534979$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{22}\log_3 1.0534679^{22} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{176}\log_3 3.1473223 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{176}+\frac{1}{176}\log_3 1.0491074$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{176}+\frac{1}{176}\times\frac{1}{23}\log_3 1.0491074^{23} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{176}+\frac{1}{4048}\log_3 3.0120285$$

$$= 0.5+0.125+0.0056818+\cdots = 0.6300\cdots$$

勿論、関数電卓を使って求める事が出来ますが、関数電卓で現れるのは自然対数です。そこで必要になるのは、対数の底を変える公式です。それは、次の式です。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{ただし } c \fallingdotseq 1 \ , \ c>0$$

これを使うと、

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{0.30103}{0.4771212} = 0.6309298\cdots$$

となります。常用対数表なら

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{0.3010}{0.4771} = 0.6308949\cdots$$

です。

では、次の値を求めてみましょう。

(1) $\log_2 3$　　(2) $\log_{3.2} 5.4$　　(3) $\log_6 78$　　(4) $\log_{0.5} 315$

いかがですか。ここでは、関数電卓ではなく常用対数表を使って求めることで、説明をします。(1)と(2)は表をみて割り算をするだけですね。

(1) $\log_2 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \dfrac{0.4771}{0.3010} = 1.5850498\cdots \fallingdotseq 1.585$

(2) $\log_{3.2} 5.4 = \dfrac{\log_{10} 5.4}{\log_{10} 3.2} = \dfrac{0.7324}{0.5051} = 1.4500099 \fallingdotseq 1.450$

(3)は78は常用対数表に載っていませんが、10で割った7.8は表から分かるので、

(3) $\log_6 78 = \dfrac{\log_{10} 78}{\log_{10} 6} = \dfrac{\log_{10}(10\times 7.8)}{\log_{10} 6} = \dfrac{\log_{10} 10+\log_{10} 7.8}{\log_{10} 6} = \dfrac{1+0.8921}{0.7782} = \dfrac{1.8921}{0.7782} = 2.4312516\cdots \fallingdotseq 2.431$

ですね。(4)の0.5は5×0.1とすればいいので、

(4) $\log_{0.5} 315 = \dfrac{\log_{10} 315}{\log_{10} 0.5} = \dfrac{\log_{10}(3.15\times 100)}{\log_{10}(5\times 0.1)} = \dfrac{\log_{10} 3.15 + \log_{10} 100}{\log_{10} 5 + \log_{10} 0.1}$

$$= \frac{0.4983 + 2}{0.6990 + \{-1\}} = \frac{2.4983}{-.301} = -8.3$$

です。

ここでひとつ謎が残ります。対数の底を変える公式についてですね。

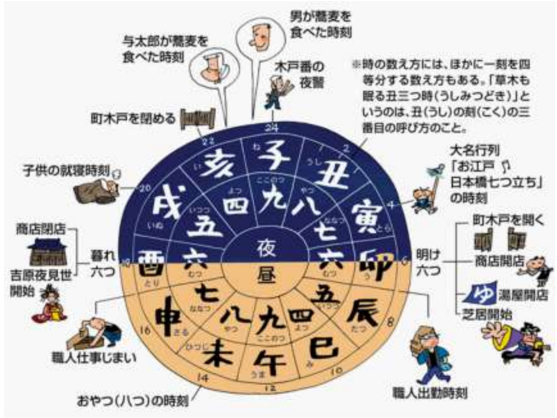
４．対数の底を変える公式について

元々、1時間というのは地球が1回自転する１日の「時」を24時間と決められました。

江戸時代の日本では、日の出と日没を基準として、日の出およそ30分前を「明け六」、日没およそ30分後を「暮れ六つ」として、その間の昼夜をそれぞれ六等分して「一刻(いっこく)」としていました。だから「一刻」でも昼夜や季節によって異なっていました。

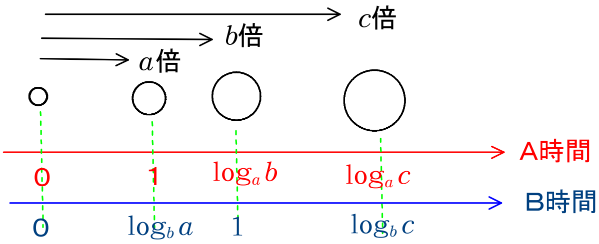
時刻の呼び方は、十二支と数が使われていました。十二支は「子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥」で、数は九つから四つまで下がると、また九つに戻ります。この数え方が落語の「時蕎麦」のオチに使われています。

怪談話で「丑三つ時」というのがありますが、「三つ」が出てきません。それは「一刻」を四等分して「丑一つ刻、丑二つ刻、丑三つ刻、丑四つ刻」としました。春分や秋分の時期なら、「子の刻」は23～1時にあたり、「丑の刻」は1～3時にあたります。だから「丑三つ時」は2時～2時30分となります。



対数の底を変える話から大分話しは逸れました。でも、「時」の単位というのは様々あるということを説明したかったのです。

ここでは、ＡとＢという２つの地域を考えます。この２つの地域では「１時間」の長さが異なります。それを「Ａ時間」「Ｂ時間」と区別します。それで、一定の時間間隔で一定の倍率で変化するものを観察したとします。Ａという地域では、１Ａ時間 a で倍になりました。Ｂという地域では、１Ｂ時間で b 倍になりました。では、ｃ倍になるのにかかる時間は、Ａ地域では $\log_a c$ Ａ時間、Ｂ地域では $\log_b c$ Ｂ時間ります。



また、a 倍になるのには、Ａ地域では１Ａ時間、Ｂ地域では $\log_b a$ Ｂ時間かかります。

さらに、b 倍になるのには、Ａ地域では $\log_a b$ Ａ時間、Ｂ地域では１Ｂ時間かかります。

これらを左図に表しました。これから、Ａ時間とＢ時間は比例の関係にあるので、

$$1 : \log_b a = \log_a b : 1 = \log_a c : \log_b c$$

が成り立ちます。これから次の様になります。

$$1 : \log_b a = \log_a c : \log_b c \qquad \log_a b : 1 = \log_a c : \log_b c$$

$$1 \times \log_b c = \log_a c \times \log_b a \qquad \log_a b \times \log_b c = \log_a c \times 1$$

$$\frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c \qquad \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_a b}$$

これが「底の変換公式」です。

また、別の説明も出来ます。それは単位の変換です。お金の単位は、日本では「円」、米国では「＄」、EUでは「ユーロ」などいろいろあります。例えば円とドルですが、4月25日では1＄はおよそ155円でした。だから、20＄の品物を日本円で購入しようとすると････20＄ ＝ 20×1＄ ＝ 20×155円 ＝ 3100円････になります。逆に、1円は1/155＄になるので、480円の品物をドルで購入しようとすると････480円 ＝ 480×1円 ＝ 480×1/155＄ ＝ 3.1＄････ですね。

ＡとＢの地域の話しに戻ります。1Ａ時間は $\log_b a$ Ｂ時間と等しく、１Ｂ時間は $\log_a b$ Ａ時間と等しくなります。では、ｃ倍になる時間は、Ａ時間で計ると $\log_a c$ Ａ時間であり、Ｂ時間で計ると $\log_b c$ Ｂ時間です。このことから、

$\log_a c$ Ａ時間 ＝ $\log_a c$ ×1Ａ時間 ＝ $\log_a c \times \log_b a$ Ｂ時間 ＝ $\log_b c$ Ｂ時間

となるので、

$$\log_a c \times \log_b a = \log_b c \qquad \therefore\ \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

となります。同様に、

$\log_b c$ Ｂ時間 ＝ $\log_b c$ × １Ｂ時間 ＝ $\log_b c \times \log_a b$ Ａ時間 ＝ $\log_a c$ Ａ時間

$$\log_b c \times \log_a b = \log_a c \qquad \therefore\ \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

となります。どちらの説明がわかりやすいですか。

５． Ⅱ部のおわりに

底を10とする常用対数は、日常で使われることがありますが、底がそれ以外の場合では、ほとんど使われている場面はありません。ただ、対数の底を変えるという「底の変換公式」が新しく登場しました。それ以外は、変わることがありませんね。

最後に、対数関数のグラフを示して起きましょう。