速算術（2022.11 報告の続き）　　2023.6.9　広田

次の計算の速算法を考えてみよう

1）65^2

2）23×27

3）43×63

4）①　19^2　　②　57^2

5）①　89×97　　②　197×193　　③　47×49

6）117×113

7）96×38

解説⑵　数と式の計算（因数分解＝展開）の公式は役に立つ

１）　$(10a+5)^2$ 型の計算

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+a^2=100a(a+1)+a^2$$

例　　７５²　＝<u>７×８</u>×100＋５²＝<u>56</u>25

２）$(10x+a)(10x+b)$ 型の計算（ただし$a+b=10$）

$$(10x+a)(10x+b) = 100x^2+10x(a+b)+ab$$
$$= x\{(10x+a)+b\}\times 10+ab$$

例　　４３×４８＝（<u>４３＋８）×４</u>０+３×８＝<u>２０４</u>０＋２４＝<u>２０６</u>４

３）$(10x+a)(10y+a)$　型の計算（ただし$x+y=10$）

$$(10x+a)(10y+a) = 100xy+10a(x+y)+a^2$$
$$= 100(xy+a)+a^2$$

例　　24×84＝（<u>16+4</u>）×100+4²　＝<u>20</u>16

４）$(10a+b)^2$ 型の計算　（②で示す、①は$a=1$のとき）

$$(10a+b)^2=100a^2+10\times 2ab+b^2=a\{(10a+b)+b\}\times 10+b^2$$

例　　７２² ＝<u>７×（７２+２）</u>×１０+２² ＝ <u>７×７４</u>×１０+０４＝<u>２１８</u>０+４＝<u>２１８</u>４

５）$(100+a)(100+b)$ 型の計算（②、③は略）

$$(100+a)(100+b) = 100^2+100(a+b)+ab$$
$$= \{(100+a)+b\}\times 100+ab$$

例　９５×９８＝（<u>９５―２</u>）×１００+（―５）×（―２）＝<u>９３</u>００+１０＝<u>９３</u>１０

6)　2)と同様　$(10X+a)(10X+b)$ 型の計算

(ただし $a+b=10$ で、X は X (X+1) が計算できる数)

例　２２３×２２７＝(22×23) ×100+3×7＝５０６２１

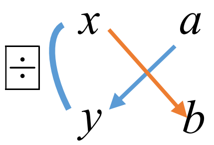
＝(２２^2+２２) ×１００+3×７＝?

7) $(10x+a)(10y+b)$ 型で　$ay+bx=10x$ ・・・①が成立するとき

$(10x+a)(10y+b)=100xy+10(ay+bx)+ab$ ・・・(＊)　で①が成立すれば、

(＊) $=100xy+100x+ab \;=\; 100x(y+1)+ab$

①が成立するかどうかは　①を変形して $\dfrac{ay}{x}+b=10$　より ay が x の倍数になるように作り、b は $\dfrac{ay}{x}$ の補数とすればよい。



例　３６×４２＝１５１２　　　68×３６＝２４４８

ソフィー･ジェルマンの恒等式を利用した素因数分解
西三数学サークル例会　2023.6.9　　　　　　齋藤　敏光

1「日曜数学者」tsujimotter氏のブログから

マリー＝ソフィ･ジェルマン（Marie−Sophie Germain、1776−1831）は、フランスの女性数学者、物理学者、哲学者。

ソフィー･ジェルマンは1776年にフランスの裕福な商人の娘として生まれました。彼女は父の蔵書を拾い読みして見つけた本を読み、数学の問題に夢中になっているうちに兵士に殺されてしまった偉大な数学者、アルキメデスの話に心を動かされました。

そこまで夢中になれる数学はきっとこの世で一番魅力的な学問に違いない！ソフィーは数学の教科書を読み漁るようになりました。

そんなソフィーを心配したのは、彼女の両親です。当時のフランスは女性が勉強することに対して最も差別的であったと言われており、「女性に数学を考えることはできない」という価値観でした。実際に女性はどれだけ頭が良くても、高等教育を受けることは許されませんでした。

19歳を迎え、大学に入学して高等教育を受けることができなくても、彼女は諦めませんでした。教科書を手に入れて自分で勉強を続け、大学で出された課題を手に入れた彼女は男性の偽名を名乗り数学者ジョセフ･ルイ･ラグランジュに提出しました。その内容を見たラグランジュは「こんな優秀な学生がいたのか」と驚いて、ソフィーの家まで尋ねました。ラグランジュは優秀な学生が実は女性であったことにまた驚愕し、この若き天才数学者は一躍有名人になりました。

ソフィーによる振動についての研究は、振動に対して強い建物を作るのに活用されました。パリにはエッフェル塔が建ち、さらに世界中に高層ビルや長い橋が次々に建造されまし

た。高層建築ブームを支えた重要な理論は、実はこのソフィーが行った研究によりもたらされたものです。

当時の女性の差別意識から、エッフェル塔に刻まれている「建造に貢献した72人の科学者」のリストに彼女の名前は入っていません。しかし当時の科学者たちは建築に必要な最も重要な計算に貢献した功績を認めており、中でも数学の歴史の中で5本の指に入るカール・フリードリッヒ・ガウス（1777－1855）は、一度は女性であると知った途端にソフィーとの交流を絶ちましたが、彼女の晩年にはゲッティンゲン大学の名誉学位を授与するよう働きかけるようになったほどでした。
　彼女は学位や学ぶ場所がなくても、大学のポストを与えられなくてもひたむきに数学の研究を続け、その研究は現在の建築工学や材料工学の土台となりました。

2 ソフィー・ジェルマンの恒等式Title

ソフィー・ジェルマン(Sophie Germain)の恒等式
$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$
Maximaで確かめる
factor(a^4+4*b^4);
→(2*b^2−2*a*b+a^2)*(2*b^2+2*a*b+a^2)

ソフィー・ジェルマン(Sophie Germain)の恒等式に
$a=1,\ b=2^k$ を代入すると

$$2^{4k+2}+1 = 1+4(2^k)^4$$
$$= (1+2^{k+1}+2^{2k+1})\cdot(1-2^{k+1}+2^{2k+1})$$

$4k+2=58$ より、 $k=14$

1+2^15+2^29;→536903681

1−2^15+2^29;→536838145 ＝5*107367629

2つの因数が近接しているので、小さい素数で割っていくのは不可能で、ソフィー・ジェルマンの恒等式の威力がわかる。

従って、 $2^{58}+1$ は素因数分解された。

Maximaで因数分解してみると、

factor(2^58+1);→5*107367629*536903681

3 「はずせないパズル」第2弾

LA ESTRELLA IMPOSIBLE COMO ENCAJA? 星をどのようにはめ込みますか

https://www.youtube.com/watch?v=iL-ZDPDEh7s

30mm×15mmの角材を使って、パズルを作ってみた。

6個のパーツが連動して動くのが面白い。鍋敷きに使えるかも（笑）。

4 参考

1. Factoring x^n-1 : cyclotomic and Aurifeuillian polynomials

5「はずせない」パズル　Cruz en Caja　ネタバレ厳禁

ばらし方と組み上げる手順を説明します。
まず完成図から順にパーツを取り出せるように何度も練習する。
最初から全部取り出すと、きっと組み上げれなくなるので①から③までを外す、組み上げるを何度も繰り返し手順に慣れる。③はずらして取り出すのが肝。⑥を取り外せば最後に⑦が残る。
Cruz en Cajaのラベルを正面にして⑦の正方形が底面に来るようにして、①まで逆順に組み上げれば、①は最上面にきて容易には外れない。

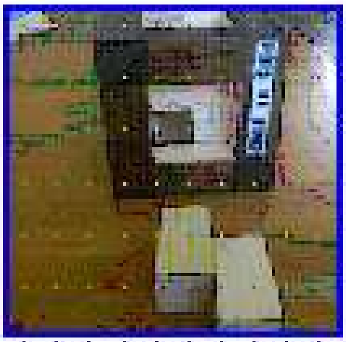

完成図


①


②


③


④


⑤


⑥

６／９（金）

関数の導入における一考察と授業実践

榊原　正憲

１．関数とは

教科書では、次のように「関数」が定義されている。**（資料２，資料３）**

中学１年　「ともなって変わる２つの変数ｘ、ｙがあって，ｘの値を決めると，それに対応してｙの値がただ１つに決まるとき，ｙはｘの関数であるといいます。」

高校数学Ⅰ「２つの変数ｘ、ｙがあって，ｘの値を定めるとそれに対応してｙの値がただ１つ定まるとき，ｙはｘの関数であるという。」

また，高校数学Ⅰの教科書には，

「ｙがｘの関数であるとき，ｙがｘの式で表されていると扱いやすい。」

と書かれている。**（資料３）**

２．関数のイメージ化→ブラックボックス

正直なところ、上の定義を生徒に示しても、実感が湧かない。そこで、関数というものを実感させるために、よく、関数で「ブラックボックス」の話をする。

私が大学時代の解析学の授業で使用した書籍（教科書）や、数学に関する書籍，その他いろいろな文献で、ブラックボックスが紹介されている。**（資料４，資料５）**

Wikipedia にも、関数のブラックボックスの説明として、以下のように書かれている。

「関数教育の道具として、ブラックボックスが使われることがある。中学校で導入されるときは、１つの入力ｘに対し１つの出力ｙが出るようなもの（１対１対応）を関数として説明する。教具としてのブラックボックス（厚紙または木箱）も存在し、入力（紙またはプラスチック）したものを機械的に裏返して出力している。」

３．ブラックボックスを使った授業実践（高等学校　数学Ⅰ）

ブラックボックスの作成にあたっては、以下のホームページを参考にし、私独自の工夫を加えた。**（資料６）**

http://izumi-math.jp/H_Ohyama/b_box/make.htm

右の**資料１**は、自作のブラックボックスである。これを用いて関数の導入部分の授業実践を行った。その様子を実演を交えて紹介する。

資料１：自作のﾌﾞﾗｯｸﾎﾞｯｸｽ

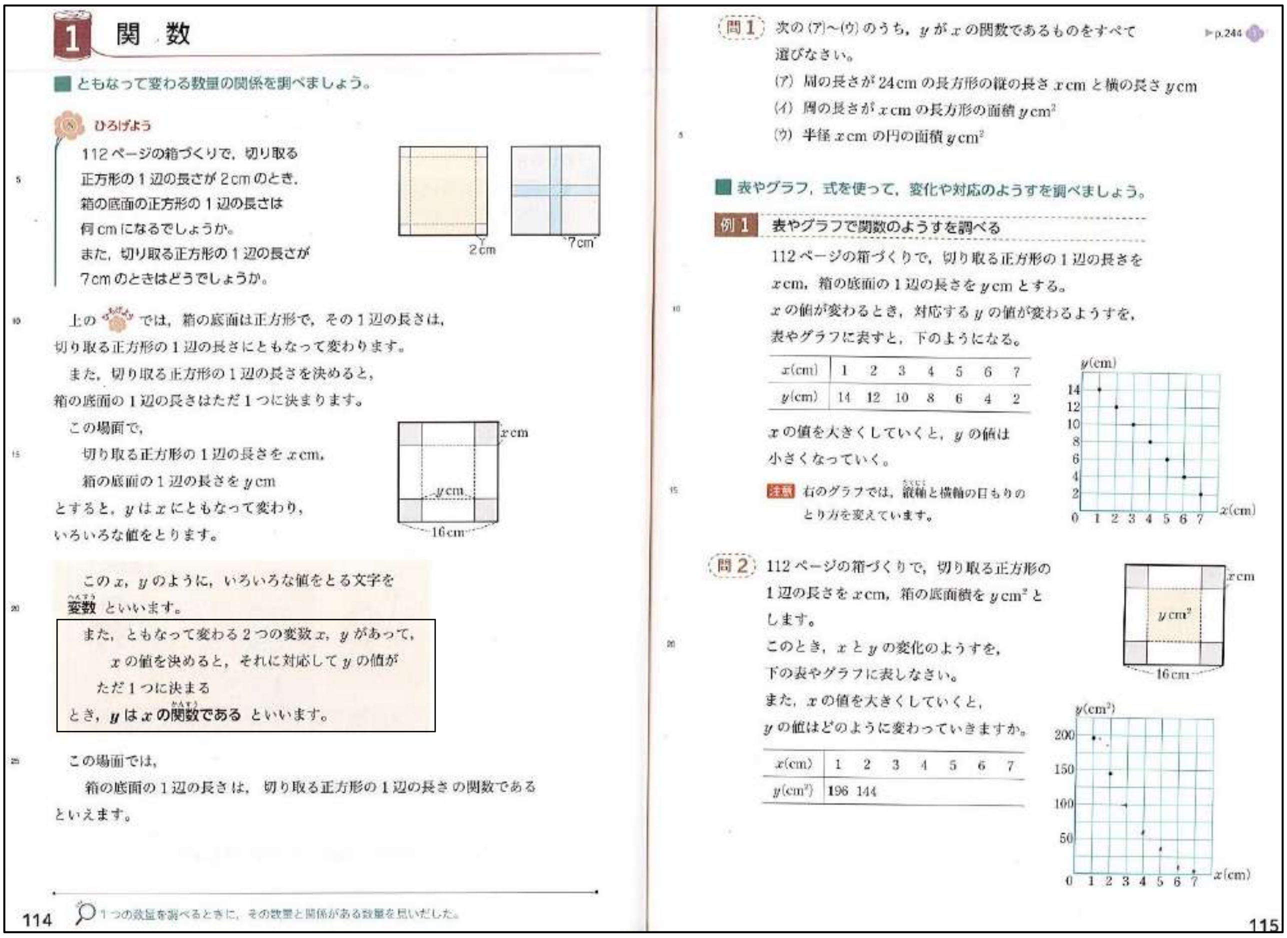
【引用・参考文献】

岡部恒治ら（2022)，『ＮＥＸＴ数学Ⅰ』，数研出版

岡本和夫ら（2022)，『未来へひろがる数学１』，啓林館

釜江哲朗・小松孝（1995)，『理工系基礎教育のための解析学（上)』，学術図書出版社

瀬山士郎（2002)，『ゼロから学ぶ数学の１、２、３　算数から微積分まで』，講談社



1 関 数

■ ともなって変わる数量の関係を調べましょう。

ひろげよう

112 ページの箱づくりで，切り取る正方形の 1 辺の長さが 2 cm のとき，箱の底面の正方形の 1 辺の長さは何 cm になるでしょうか。
また，切り取る正方形の 1 辺の長さが 7 cm のときはどうでしょうか。

2 cm　7 cm

上の ひろげよう では，箱の底面は正方形で，その 1 辺の長さは，切り取る正方形の 1 辺の長さにともなって変わります。
また，切り取る正方形の 1 辺の長さを決めると，箱の底面の 1 辺の長さはただ 1 つに決まります。

この場面で，
切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，
箱の底面の 1 辺の長さを y cm
とすると，y は x にともなって変わり，いろいろな値をとります。

x cm　y cm　16 cm

この x，y のように，いろいろな値をとる文字を **変数**（へんすう） といいます。

また，ともなって変わる 2 つの変数 x，y があって，
x の値を決めると，それに対応して y の値が
ただ 1 つに決まる
とき，**y は x の関数（かんすう）である** といいます。

この場面では，
箱の底面の 1 辺の長さは，切り取る正方形の 1 辺の長さ の関数であるといえます。

114　1 つの数量を調べるときに，その数量と関係がある数量を見いだした。

（問 1）次の (ア)〜(ウ) のうち，y が x の関数であるものをすべて選びなさい。　▶p.244
(ア) 周の長さが 24 cm の長方形の縦の長さ x cm と横の長さ y cm
(イ) 周の長さが x cm の長方形の面積 y cm^2
(ウ) 半径 x cm の円の面積 y cm^2

■ 表やグラフ，式を使って，変化や対応のようすを調べましょう。

例 1　表やグラフで関数のようすを調べる

112 ページの箱づくりで，切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の底面の 1 辺の長さを y cm とする。
x の値が変わるとき，対応する y の値が変わるようすを，表やグラフに表すと，下のようになる。

x(cm)	1	2	3	4	5	6	7
y(cm)	14	12	10	8	6	4	2

x の値を大きくしていくと，y の値は小さくなっていく。

注意　右のグラフでは，縦軸（たてじく）と横軸の目もりのとり方を変えています。

y(cm)　x(cm)

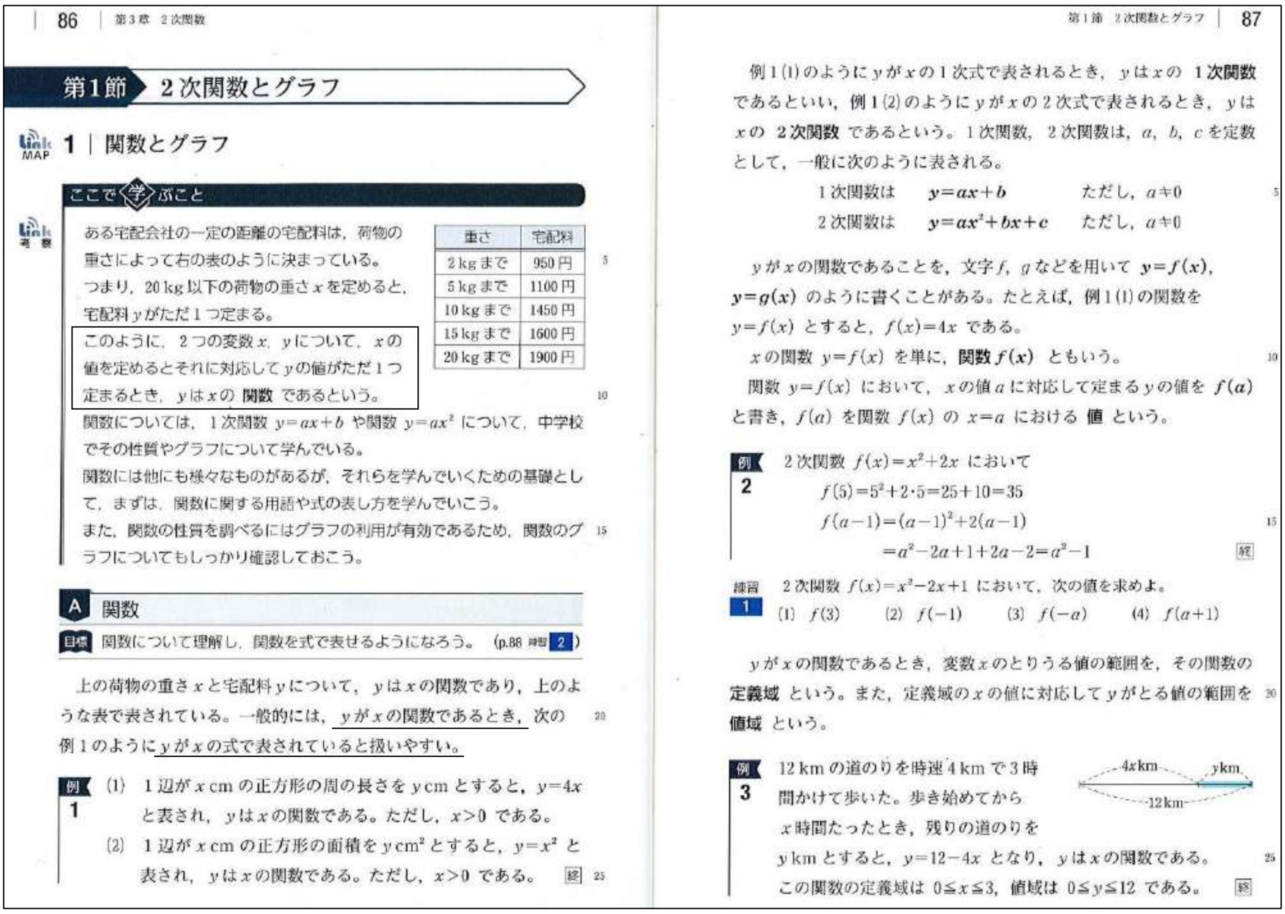
（問 2）112 ページの箱づくりで，切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の底面積を y cm^2 とします。
このとき，x と y の変化のようすを，下の表やグラフに表しなさい。
また，x の値を大きくしていくと，y の値はどのように変わっていきますか。

x(cm)	1	2	3	4	5	6	7
y(cm^2)	196	144					

x cm　y cm^2　16 cm　y(cm^2)　x(cm)

115

資料２：中学校数学での関数の定義（岡部恒治ほか, 2021, p. 114-115）



86　第 3 章　2 次関数

第1節　2 次関数とグラフ

1 ｜ 関数とグラフ

ここで学ぶこと

ある宅配会社の一定の距離の宅配料は，荷物の重さによって右の表のように決まっている。
つまり，20 kg 以下の荷物の重さ x を定めると，宅配料 y がただ 1 つ定まる。
このように，2 つの変数 x，y について，x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の **関数** であるという。
関数については，1 次関数 $y=ax+b$ や関数 $y=ax^2$ について，中学校でその性質やグラフについて学んでいる。
関数には他にも様々なものがあるが，それらを学んでいくための基礎として，まずは，関数に関する用語や式の表し方を学んでいこう。
また，関数の性質を調べるにはグラフの利用が有効であるため，関数のグラフについてもしっかり確認しておこう。

重さ	宅配料
2 kg まで	950 円
5 kg まで	1100 円
10 kg まで	1450 円
15 kg まで	1600 円
20 kg まで	1900 円

A 関数

目標　関数について理解し，関数を式で表せるようになろう。（p.88 練習 2）

上の荷物の重さ x と宅配料 y について，y は x の関数であり，上のような表で表されている。一般的には，y が x の関数であるとき，次の例 1 のように y が x の式で表されていると扱いやすい。

例 1
(1) 1 辺が x cm の正方形の周の長さを y cm とすると，$y=4x$ と表され，y は x の関数である。ただし，$x>0$ である。
(2) 1 辺が x cm の正方形の面積を y cm^2 とすると，$y=x^2$ と表され，y は x の関数である。ただし，$x>0$ である。 終

第 1 節　2 次関数とグラフ　87

例 1 (1) のように y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数** であるといい，例 1 (2) のように y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の **2 次関数** であるという。1 次関数，2 次関数は，a，b，c を定数として，一般に次のように表される。

1 次関数は　$\boldsymbol{y=ax+b}$　ただし，$a \neq 0$
2 次関数は　$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$　ただし，$a \neq 0$

y が x の関数であることを，文字 f，g などを用いて $\boldsymbol{y=f(x)}$，$\boldsymbol{y=g(x)}$ のように書くことがある。たとえば，例 1 (1) の関数を $y=f(x)$ とすると，$f(x)=4x$ である。
x の関数 $y=f(x)$ を単に，**関数 $f(x)$** ともいう。
関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と書き，$f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x=a$ における **値** という。

例 2　2 次関数 $f(x)=x^2+2x$ において
$f(5)=5^2+2\cdot5=25+10=35$
$f(a-1)=(a-1)^2+2(a-1)$
$=a^2-2a+1+2a-2=a^2-1$ 終

練習 1　2 次関数 $f(x)=x^2-2x+1$ において，次の値を求めよ。
(1) $f(3)$　(2) $f(-1)$　(3) $f(-a)$　(4) $f(a+1)$

y が x の関数であるとき，変数 x のとりうる値の範囲を，その関数の **定義域** という。また，定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を **値域** という。

例 3　12 km の道のりを時速 4 km で 3 時間かけて歩いた。歩き始めてから x 時間たったとき，残りの道のりを y km とすると，$y=12-4x$ となり，y は x の関数である。
この関数の定義域は $0 \leqq x \leqq 3$，値域は $0 \leqq y \leqq 12$ である。 終

$4x$ km　y km　12 km

資料３：高等学校数学Ⅰでの関数の定義（岡部恒治ほか, 2022, p. 86-87）

2.3　ブラック・ボックス

関係して変わる２つの変量に対して，その変化のメカニズムはよく分からないが，ともかくもある数値を入れるとある数値が出てくることだけが分かっているとき，その関係を「ブラックボックス」ということがある．

ブラックボックスとは，ある数値の入力に対してある数値を出力として出す装置である．もともとは工学用語として使われていたらしいが，数学

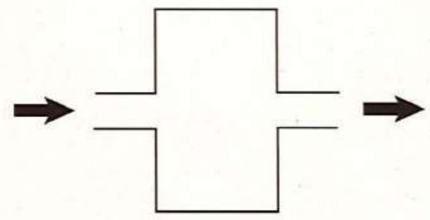


図2.3　ブラックボックス

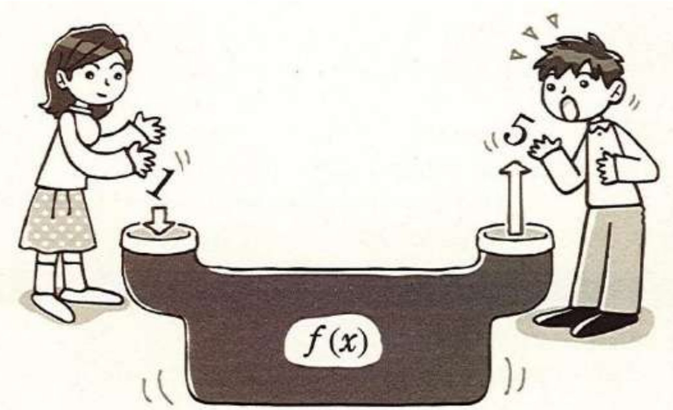
（数学教育）ではメカニズムの分からない関数関係を表す用語として使われる．こんな図式で表すことが多い．

四角の左側からある数値が入力としてインプットされ，箱の内部で（どんな仕掛けか分からないが，これがブラックボックス！）加工されて，右側から出力としてアウトプットされる．

これを数学記号で

$y=f(x)$

と書く．f は英語の function（機能，働き）の頭文字である．x を f という機能で加工するという気持ちである．

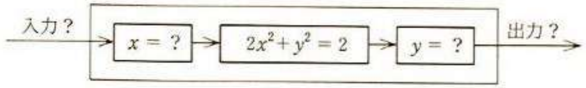


ブラックボックス

資料４：数学に関する書籍での関数の例（瀬山士郎, 2002, p. 63–65）

I-1　関数と逆関数

２つの変数 x と y が一定の関係を保っているとき，x に対して，この関係を満たす y を対応させることができる．たとえば，$2x^2+y^2=2$ という関係があるとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす x に対して，$y=\pm\sqrt{2-2x^2}$ を対応させる．これは，x として１つの値を代入したとき，対応する y の値が得られることを意味する．すなわち，下図のように，入力から出力を計算する方式が与えられたと考える．



ここで，入出力の関係のみを問題とするなら，これらがどういう文字で表現されるか，あるいは，どういう方法で計算されるかということは問題とならない．すなわち，上図の線で囲った中は “black box” であって，われわれはここに立ち入ることはない．一般に，このような観点から考察される２つの数の間の対応を**関数**と呼ぶ．ここで，“black box” といった意味は，われわれがこの中身を知らないという意味ではなく，結果として得られる入出力の関係を問題にしているということである．すなわち，異なる方法で計算されても，結果として，同一の対応が生じるならば，それらは同じ関数と考える．関数を表示するには，上記の “black box” の部分を表示すればよい．たとえば，これを f とおくとき，入力 x に対応する出力は $f(x)$ と書かれる．$f(x)$ で変数 x に $f(x)$ を対応させる関数を表すこともある．

このように関数は対応であるから，変数間の関係を与えるだけでは不十分である．たとえば，$y=x^2+2$ という関係を満たす x と y が与えられたとき，この x に y を対応させるといって，はじめて関数が確定する．ここにおいても，y に x を対応させる関数は別の関数となる．一般に，変数 x と y がある関係を満たしているとき，x に y を対応させる関数と y に x を対応させる関数は，互いに逆関数の関係にあるといい，一方を他方の**逆関数**と呼ぶ．

関数は，どのような入力に対しても出力が一意に定まる場合，**1価関数**と呼ばれ，そうでない場合，**多価関数**と呼ばれる．たとえば，関係 $y=x^2+2$ において，x に y を対応させる関数は１価関数であるが，y に x を対応させる関数は多価関数となる．また，関係 $2x^2+y^2=2$ においては，x に y を対応させる関数も，y に x を対応させる関数も，ともに多価関数となる．

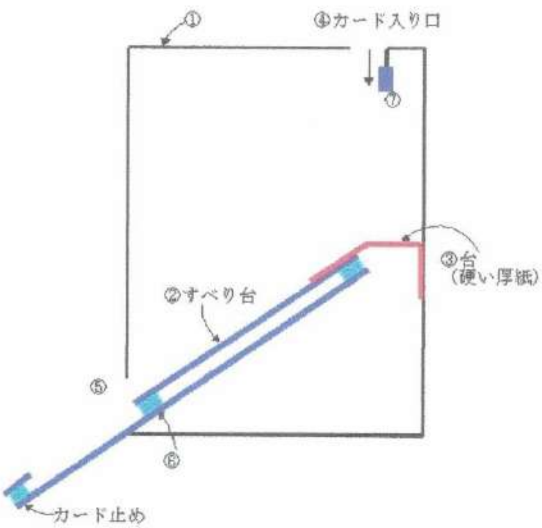
資料５：大学解析学の書籍（教科書）より（釜江哲朗・小松孝, 1995, p. 86–87）

ブラックボックスの作り方

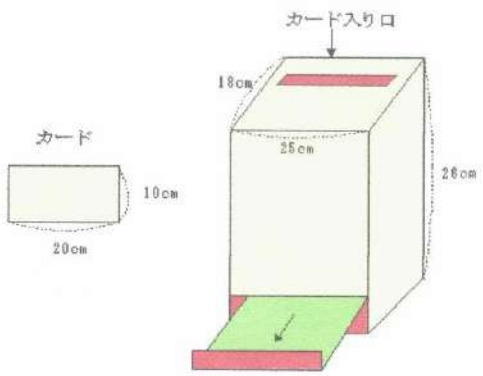
- 材料
    - ダンボール箱
    - 段プレート（大丸藤井４Ｆ，畳１枚分￥1,800）
    - 硬い厚紙（菓子箱の蓋でも可）
    - カラーガムテープ（￥150）
    - 両面テープ又は接着剤
- しかけ

入り口④から入ったカードが③の台にひっかかって，ひっくり返り，⑤の出口から出て，下のカード止めにぶつかり止まる。

- 作り方のポイント
    - ③の台は，箱と直角になるように折り曲げて，接着する。
    - 入り口④に，ダンプレート切れ端等で作ったおもり⑦をガムテープでぶらさげるとカードがひっくり返るとき，微妙な効果を発揮する。
    - 入り口④の巾は２cm位，必ず箱の背面から２cm離す。
    - 台③の巾は３cm位。
    - カードの大きさによって，台の高さを決める。
    - すべり台は⑥の部分で段差をつけることによって，カードの連射をねらう。
      このとき，つけはずし可能なマジックテープで接着するとよい。
- 構造図



- 参考寸法



- 参考文献
    - 「教具でアプローチする算数」　北海道・日高サークル　沼里喜代三　著

資料６：ブラックボックスの作り方ホームページ