

高校数学に微分方程式の復活を！

草薙 浩二

1. はじめに

1960年(昭和35年)改訂の学習指導要領で、高校数学に「微分方程式」が登場しました。数学Ⅰ、数学ⅡA、数学ⅡB、数学Ⅲ、応用数学の時代で、数学Ⅲと応用数学に、積分の応用の中に「微分方程式の意味」がありました。

それは、1970年(昭和45年)改訂の学習指導要領の一般数学、数学Ⅰ、数学ⅡA、数学ⅡB、数学Ⅲ、応用数学の時代にも受け継がれて、数学Ⅲと応用数学にありました。

さらに、1978年(昭和53年)改訂の学習指導要領の数学Ⅰ、数学Ⅱ、代数幾何、基礎解析、微分積分、確率統計の時代の微分積分にありました。

それが、1989年(平成元年)改訂の学習指導要領の数学Ⅰ、数学Ⅱ、数学Ⅲ、数学A、数学B、数学Cの時代から、「微分方程式」は姿を消し、1999年(平成11年)改訂の数学基礎、数学Ⅰ、数学Ⅱ、数学Ⅲ、数学A、数学B、数学Cの時代、2008年(平成20年)改訂の数学活用、数学Ⅰ、数学Ⅱ、数学Ⅲ、数学A、数学Bの時代、2018年(平成30年)改訂の数学Ⅰ、数学Ⅱ、数学Ⅲ、数学A、数学B、数学Cの時代と復活することはありませんでした。

つまり、1960年代から1980年代の30年間、高校数学に微分方程式が存在し、ほぼ平成の時代からは存在していません。

2. 復活すべき微分方程式の内容

(1) バクテリアの増殖

栄養が十分にあり、成長するのに適した環境にあるバクテリアを考えます。時刻 t におけるバクテリアの量を $m(t)$ とします。僅かな時間 Δt 経過した時刻 $t + \Delta t$ のバクテリアの量は $m(t + \Delta t)$ と表されます。この Δt 時間に増えたバクテリアの量は、 $m(t + \Delta t) - m(t) \cdots \cdots \textcircled{1}$ と表すことが出来ます。

見方を変えて考えます。100あったバクテリアが Δt の時間が経ったら101になったとすると、 $2\Delta t$ 経ったら102に、 $3\Delta t$ 経ったら103になるだろうから、増えるバクテリアの量は時間 Δt に比例すると考えられます。

また、100あったバクテリアが Δt の時間が経ったら101になったとすると、200あったら Δt の時間が経ったら202に、300あったら Δt の時間が経ったら303になるだろうから、増えるバクテリアの量はバクテリアの量 $m(t)$ に比例すると考えられます。

すると、 $t \sim t + \Delta t$ の間に増えたバクテリアの量は、 $m(t) \times \Delta t$ に比例すると考えられるので、比例定数を k として、 $km(t)\Delta t \cdots \cdots \textcircled{2}$ と表すことが出来ます。

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ から、 $m(t + \Delta t) - m(t) = km(t)\Delta t \cdots \cdots \textcircled{3}$ という式が成り立ちます。両辺を Δt で割って、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} k m(t)$, $\frac{dm}{dt} = km \cdots \cdots \textcircled{4}$ となります。これが、バクテリアの成長を表す微分方程式です。

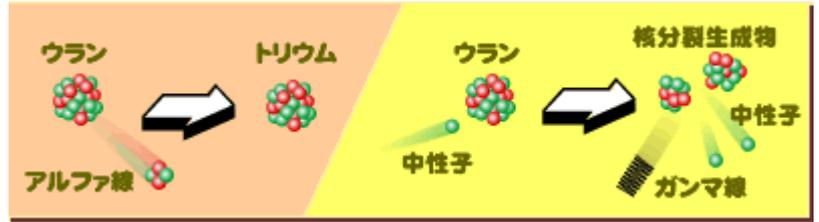
この $\textcircled{4}$ の微分方程式から、 $\frac{dm}{m} = k dt$ として、 $t = 0$ のとき、 $m(0) = m_0$ として積分すると、 $\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \int_0^t k dt$

で、 $[\log |m|]_{m_0}^m = [kt]_0^t$, $\log m - \log m_0 = kt$, $\log \frac{m}{m_0} = kt$, $\frac{m}{m_0} = e^{kt}$, $m = m_0 e^{kt} \cdots \cdots \textcircled{5}$ です。

(2) 放射性元素の崩壊

ウランは自らアルファ線を出して変化する「放射性物質」であるとともに、中性子が当たると核分裂を起こす「核分裂性物質」でもあります。

ウランには、核分裂し易いウラン 235 と核分裂しにくいウラン 238 があります。



ウラン 235 とウラン 238、言葉の上では『5』と『8』が違うだけですが、この違いは何を表しているのでしょうか？実は、この数字は原子核に含まれる中性子の数の違いを表しています。

ウランは原子番号 92 ですから、陽子数は 92。中性子の数は、ウラン 235 で $235 - 92 = 143$ 、ウラン 238 で $238 - 92 = 146$ です。この 2 つはどちらも同じウランですが、中性子の数が違うので同位体と呼ばれています。

	ウラン 235	ウラン 238
原子番号 (陽子数)	92	92
中性子数	143	146
核分裂	核分裂し易い	核分裂しにくい
放射能の半減期	7 億年	45 億年
自然での割合	0.7%	99.3%

放射性元素の崩壊を考えます。時刻 t における放射性元素の量を $N(t)$ とします。僅かな時間 Δt 経過した時刻 $t + \Delta t$ の放射性元素の量は $N(t + \Delta t)$ と表されます。この Δt 時間に崩壊した放射性元素の量は、 $N(t) - N(t + \Delta t) \cdots \textcircled{1}$ と表すことができます。

見方を変えて考えます。100 あった放射性元素が Δt の時間が経ったら 1 崩壊したとすると、 $2\Delta t$ 経ったら 2 崩壊し、 $3\Delta t$ 経ったら 3 崩壊するだろうから、崩壊する元素の量は時間 Δt に比例すると考えられます。

また、100 あった放射性元素が Δt の時間が経ったら 1 崩壊したとすると、200 あったら Δt の時間で 2 崩壊し、300 あったら Δt の時間で 3 崩壊するだろうから、崩壊する元素の量は放射性元素の量 $N(t)$ に比例すると考えられます。

すると、 $t \sim t + \Delta t$ の間に崩壊した元素の量は、 $N(t) \times \Delta t$ に比例すると考えられるので、比例定数を k として、 $kN(t)\Delta t \cdots \textcircled{2}$ と表すことができます。

①と②から、 $N(t) - N(t + \Delta t) = kN(t)\Delta t \cdots \textcircled{3}$ という式が成り立ちます。両辺を $-\Delta t$ で割って、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-kN)$ 、 $\frac{dN}{dt} = -kN \cdots \textcircled{4}$ となります。これが、放射性元素の崩壊を表す微分方程式です。

この④の微分方程式から、 $\frac{dN}{N} = -k dt$ として、 $t = 0$ のとき、 $N(0) = N_0$ として積分すると、 $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\int_0^t k dt$ で、 $[\log |N|]_{N_0}^N = -[kt]_0^t$ 、 $\log N - \log N_0 = -kt$ 、 $\log \frac{N}{N_0} = -kt$ 、 $\frac{N}{N_0} = e^{-kt}$ 、 $N = N_0 e^{-kt} \cdots$

⑤となります。

(3) 年代測定

年代測定で放射性元素の炭素 14($^{14}_6\text{C}$)の話は有名ですが、上野健爾氏の「数学フィールドワーク」には、アルゴン 40($^{40}_{18}\text{Ar}$)の話が載っていました。 $^{14}_6\text{C}$ の半減期は 5730 年で、 $^{40}_{18}\text{Ar}$ の半減期は 12 億 5000 年で、比較的新しい年代の測定には $^{14}_6\text{C}$ を使い、古い年代の測定には $^{40}_{18}\text{Ar}$ が使われます。

極めて微量ですが大気中にも $^{14}_6\text{C}$ が存在します。大気中の窒素 14($^{14}_7\text{N}$)に宇宙線があたって($^{14}_7\text{N}$ に宇宙線による中性子が吸収され、 $^{14}_6\text{C}$ と陽子が生成される) $^{14}_6\text{C}$ が生じます。長い間にわたり大気の組成が変わらない限り、大気中には一定の割合で、 $^{14}_6\text{C}$ が存在すると考えられます。植物は炭酸同化作用で、大気中の二酸化炭素を吸収して、根から吸収した水と太陽エネルギーを使って炭水化物を作ります。二酸化炭素を作っている炭素は炭水化物に使われ、植物に残ります。二酸化炭素を作っている炭素の大部分は炭素 12($^{12}_6\text{C}$)と炭素 13($^{13}_6\text{C}$)ですが、極めて微量ですが、($^{14}_6\text{C}$)も一定の割合で含まれています。

もし、植物が枯れて地中に埋もれて、大気との接触がなくなると、それまでに作った炭水化物に含まれるものだけで、新たに供給されることはなくなります。それで、 $^{14}_6\text{C}$ の半減期は 5730 年で崩壊していくので、その量は減っていきます。

従って、地中に埋もれた遺跡に残された枯れ木などの植物が手に入れば、それに含まれる $^{14}_6\text{C}$ の量を調べることで、その植物の枯れた大体の年代を知ることが出来ます。

(2)の放射性元素の崩壊で記述したように、元素の量は、 $N = N_0 e^{-kt}$ となるので、 $^{14}_6\text{C}$ の半減期が 5730 年だから、 $t = 5730$ 、 $N = \frac{1}{2} N_0$ を代入して、 $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-k \times 5730}$ 、 $\frac{1}{2} = e^{-5730k}$ 、 $-\log \frac{1}{2} = 5730k$ 、 $5730k = \log 2$ 、 $k = \frac{\log 2}{5730}$ と比例定数が決まります。

$^{14}_6\text{C}$ は β 崩壊をして、 β 線(電子線)と反電子を放出して $^{14}_7\text{N}$ になるので、 $^{12}_6\text{C}$ や $^{13}_6\text{C}$ になることはないので、資料の $^{14}_6\text{C}$ と $^{12}_6\text{C}$ の割合を調べて、現在の大気中の割合を調べれば、年代測定が出来ます。勿論、昔と現在での割合は変わらないことを仮定します。

資料の $^{14}_6\text{C}$ と $^{12}_6\text{C}$ の比の値を a 、現在の大気中の $^{14}_6\text{C}$ と $^{12}_6\text{C}$ の割合を b とすると、 $a = b e^{-kt}$ となるので、 $\frac{a}{b} = e^{-kt}$
 $\frac{b}{a} = e^{kt}$ 、 $kt = \log \frac{b}{a}$ 、 $t = \frac{1}{k} \log \frac{b}{a} = \frac{5730}{\log 2} \log \frac{b}{a}$ として年代が計算出来ます。

5730 年前の半減期のときは、 $\frac{b}{a} = 2$ だから、当てはめて計算すると、キチンと 5730 年が出ます。これは確認です。

では、現在の大気中のものより 70%であるとすると、 $\frac{b}{a} = \frac{1}{0.7} = 1.4285714$ だから、2948.50...と 2950 年前となります。70%というのは 30%が崩壊をしたことになります。

こういうことを高校数学で扱った方がいいのではないのでしょうか。

ネットで年代測定を検索すると、この他に、カリウム - アルゴン法、アルゴン - アルゴン法、ウラン - 鉛法、ルビジウムストロンチウム法、ヘリウム-ヘリウム法、ウ素-キセノン法、ランタン-バリウム法、鉛-鉛法、ルテチウム-ハフニウム法、ネオン-ネオン法、レニウム-オスミニウム法、サマリウム-ネオジム法、ウラン-鉛-ヘリウム法、ウラン-トリウム法、ウラン-ウラン法 (U-U)、ヨウ素 129 法 等もあるようです。

(4) ウランの話

ここは、数学の話しではなくなりますが、今を生きる人としての教養です。

ウラン 235 の原子核は中性子を吸収すると 2 つに分裂します。この際に 2 個ないし 3 個の中性子を出し、それによってさらに反応が続きます。いわゆる連鎖反応です。だから、原子力分野に用いられ、原子力発電では多量の中性子を吸収するホウ素、カドミウム、ハフニウムなどでできた制御棒で反応を制御しています。大量のエネルギーが一気に解放すると核爆発を起こし核兵器として利用されています。この核分裂で発生するエネルギーは一原子当たり 200 MeV で、1 モル当たりでは 19 TJ もあります。爆発を起こさせるためには 90% 程度の純度が求められます。これを用いて広島に投下された原子爆弾が作られ、そのエネルギーは $5 \times 10^{13} \text{J}$ のエネルギーを出しました。東日本大震災の地震のエネルギーは、 $2 \times 10^{18} \text{J}$ です。

ウラン 238 は、中性子が衝突するとウラン 239 になります。それは不安定で β 崩壊しネプツニウム 239 になり、さらに β 崩壊 (半減期 2.355 日) してプルトニウム 239 になります。劣化ウランは、ほとんどがウラン 238 です。濃縮ウランは天然ウランを濃縮して、よりウラン 235 の濃度を高めたものです。

通常、ウラン 238 は中性子の捕獲率が高く、それは結果としてウラン 235 の核分裂反応を妨げます。そのため、兵器級濃縮ウランを製造する際には、ウラン 238 の割合が低くなるように配慮されます。広島に投下された原子爆弾ではウラン 235 が 80%、ウラン 238 が 20% でした。ただし、ウラン 238 も高速中性子にさらされると核分裂反応が起こります。

軽水炉による原子力発電においては低濃縮ウランが用いられますが、ウラン 238 が中性子照射によって核種変換されて生じるプルトニウムはそのまま核分裂してエネルギー生成に寄与します。

環境省の HP では、<https://www.env.go.jp/chemi/rhm/h28kisoshiryo/h28kiso-01-02-08.html>

放射線を出す原子核の中には、大変長い半減期を持つものがあります。ウラン 238 の半減期は 45 億年です。地球の年齢は約 46 億年といわれていますので、地球が生まれたときに存在したウラン 238 は今ようやく半分になったところです。

放射性物質の中には、1 回放射線を出して安定になるものもありますが、安定な物質になるまでに複数回壊変して、いろいろな放射性物質に変化するものもあります。

例えば、ウラン 238 は α (アルファ) 線を放出してトリウム 234 に変わりますが、これも放射性物質です。トリウム 234 は更に β (ベータ) 線を放出し、やはり放射性物質のプロトアクチニウム 234 に変化します。安定な鉛 206 になるまでに 10 数回も異なる原子に変化する系列をなしています。

カリウム 40 も、半減期が 13 億年と長く、地球が誕生したときに地球に取り込まれた自然起源の放射性物質です。しかし、カリウム 40 は系列を作らず 1 回の壊変で安定なカルシウム 40 になります。

中部電力の原子力発電のしくみでは、https://www.chuden.co.jp/energy/nuclear/nuc_about/nuc_shikumi/

ウラン 235 に中性子が当たると核分裂を起こします。このとき、熱エネルギーと中性子が放出され、この中性子がさらに別のウラン 235 に当たるとまた核分裂を起こします。これを核分裂の連鎖反応といいます。

原子力発電所では、制御棒*や水を使って中性子の数やスピードをコントロールすることで、安定的に核分裂を起こすようにしています。

自然界に存在するウランには、核分裂しやすいウラン 235 と、ほとんど核分裂しないウラン 238 があります。原子爆弾はウラン 235 の割合を 100% 近くまで濃縮し、瞬時に大量のエネルギーを発生させるものです。

一方、原子力発電所で使う燃料にはウラン 235 が 3~5%、ウラン 238 が 95~97% の割合で含まれているため、一気に核分裂させようとしても、ウラン 238 が中性子を吸収して核分裂を抑えます。3~4 年かけて核分裂をさせて、少しずつエネルギーを発生させています。

原子力発電は、本当に安全でしょうか？

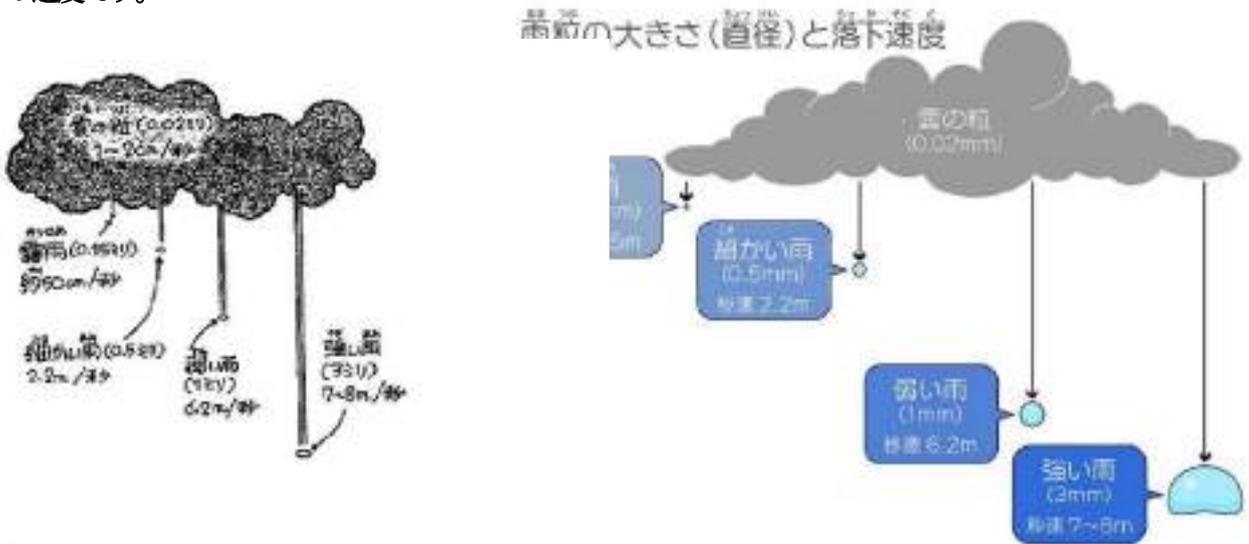
3. 自由落下の話し

高校物理で学習するように、自由落下では、 t 秒後の落下速度 v は、 $v = gt$ 、落下距離 s は、 $s = \frac{1}{2}gt^2$ です。この2式から t を消去すると、 $v^2 = 2gs$ となります。

あま雲と言われる乱層雲(右上図)の高さは2000m~7000mで、かみなり雲と言われる積乱雲(右下図)の高さは地表付近~13000mです。雨が降ってくるのを2000mとすると、自由落下で考えると、 $v^2 = 2gs = 2 \times 9.8 \times 2000 = 39200$ 、 $v = \sqrt{39200} = 197.9\dots$ と、約200m/sの速さになります。そういう実感はありますか。時速にしたら720km/hにもなります。そんなことはありません。



日立市シビックセンター科学館のHP(<http://www.civic.jp/science/%E5%B1%95%E7%A4%BA56/>)には、雨粒の大きさと落下速度の右図がありました。また、学研キッズネット(<https://kids.gakken.co.jp/kagaku/kagaku110/science0308/>)には左図がありました。また、違うところでは、では、直径2mmの雨粒は7m/s、5mmの雨粒では10m/sと記載されていました。高々10m/sの速度です。



なぜでしょう？

それは、雨粒が空気中を落下するとき、重力以外に空気の抵抗力が働いているからで、空気の抵抗力は速度に比例して(または速度の2乗に比例)、だんだん大きくなり、重力と釣り合ってしまう、その後は等速度で落下するからです。

高校物理の範囲なら、運動方程式 $ma = mg - kv$ を立てます。 kv は空気の抵抗力で、 k は比例定数です。落下速度が一定になったときは加速度が0だから、 $0 = mg - kv$ となります。この式から、 $v = \frac{mg}{k}$ となります。すると、落下するときの終端速度は雨粒の質量に依存します。比例定数 k は雨粒の何に依存するのでしょうか？

そこで、ネットで『抵抗力物理』で検索すると、運動の法則(2): 抵抗力 - 物理学基礎 AI - 鹿児島大学 (<https://www.eee.kagoshima-u.ac.jp/~watanabe-lab/Phys2019/%E7%89%A9%E7%90%86%E5%AD%A6%E5%9F%BA%E7%A4%8EAI-2019-3-R2.pdf>)

に、空気中を小さい速度で動くときは、抵抗力 f は速度に比例し kv と表され、 k は大きさに比例するとあります。すると、 $v = \frac{mg}{k}$ は大ききの2に比例することになります。同じ所には、空気中を大きい速度で動くときは、抵抗力 f は速度の2乗に比例し kv^2 と表され、 k は断面積に比例するとありました。

では、微分方程式として解いてみましょう。

運動方程式 $ma = mg - kv$ ですが、加速度を速度の時間微分で表して、 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ ですが、両辺を質量で

割って、 $\frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv}{m} = g - \frac{kv}{m}$ これから、 $\frac{dv}{g - \frac{kv}{m}} = dt$ これを、 $t = 0, v = v_0$ で積分すると、

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{g - \frac{kv}{m}} = \int_0^t dt, \left[\log \frac{1}{g - \frac{kv}{m}} \times \left(-\frac{k}{m}\right) \right]_{v_0}^v = [t]_0^t$$

$$\log \frac{g - \frac{kv}{m}}{g - \frac{kv_0}{m}} - \log \frac{g - \frac{kv_0}{m}}{g - \frac{kv_0}{m}} = t, \log \frac{g - \frac{kv_0}{m}}{g - \frac{kv}{m}} = t, \frac{g - \frac{kv_0}{m}}{g - \frac{kv}{m}} = e^t, \frac{g - \frac{kv}{m}}{g - \frac{kv_0}{m}} = e^{-t}$$

$$\frac{\frac{kv}{m} - g}{\frac{kv_0}{m} - g} = e^{-t}, \frac{kv}{m} - g = \left(\frac{kv_0}{m} - g\right)e^{-t}, \frac{kv}{m} = g + \left(\frac{kv_0}{m} - g\right)e^{-t}$$

従って、 $v = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \left(\frac{kv_0}{m} - g\right)e^{-t}$ となります。時間 t を無限大にすれば、 $v_\infty = \frac{mg}{k}$ となります。ここまでは高校

数学の範囲です。また、終端速度は高校物理で学んだ結果と一致しています。

では、速度が大きいときは、速度の2乗にした抵抗力が働くから、運動方程式は、 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ です両辺を質量で

割って、 $\frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv^2}{m} = g - \frac{kv^2}{m}$ これから、 $\frac{dv}{g - \frac{kv^2}{m}} = dt$ これを、 $t = 0, v = v_0$ で積分すると、

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{g - \frac{kv^2}{m}} = \int_0^t dt, \left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} \log \frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v} \right]_{v_0}^v = [t]_0^t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{m}{kg}}} \log \frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} \log \frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 + 1}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v_0} = t, \frac{1}{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} \log \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1\right)\left(1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)}{\left(1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 + 1\right)} = t$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1\right)\left(1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)}{\left(1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 + 1\right)} = e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}, \frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v} = \frac{\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 + 1}{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v_0} e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} \text{ となり、時間 } t \text{ を無限大にす}$$

ると、 $\frac{1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v}{\sqrt{\frac{k}{mg}}v + 1} = 0, 1 - \sqrt{\frac{k}{mg}}v = 0$ 従って、 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ となります。この結果は、 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$

で、加速度を0と置いた式で求める事が出来ます。つまり、速度が大きい場合は、空気の抵抗力の比例係数は断面積に比例するので、大きさの平方根に比例することになります。

空気の抵抗力が速度に比例すると計算すると、終端速度は大きさの2乗に比例することがわかります。また、空気の抗力が速度の2乗に比例すると、終端速度は大きさの平方根に比例することがわかります。この結果は、雲粒と雨粒の終端速度 | 色と形で気象予報士 (<https://irokata7.com/2021/06/05/k3-shutan-sokudo/>)に書かれています。

この積分の計算は、Wolfram Alpha 計算知能を使いました。

WolframAlpha 計算知能

1/(a-b*x^2) の積分

不定積分

$$\int \frac{1}{a-bx^2} dx = \frac{\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}} + \text{定数}$$

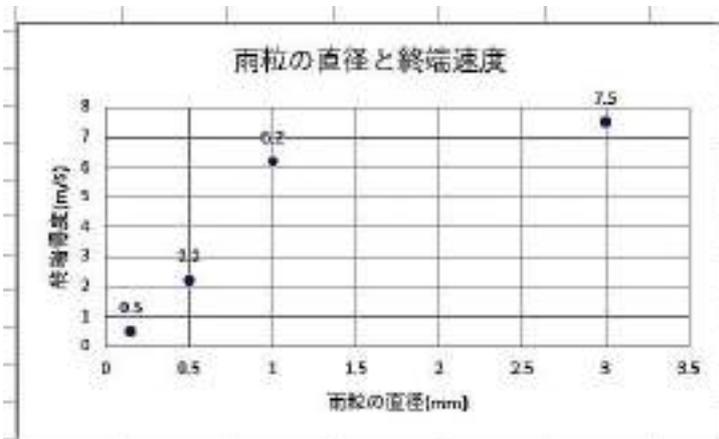
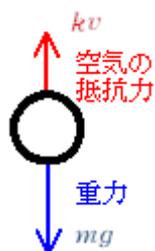
別の形

$$\frac{\log\left(\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}}+1\right)}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} - \frac{\log\left(1-\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a}}\right)}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} + \text{定数}$$

a, b, x を正と仮定した場合の別の形

$$\frac{\tanh^{-1}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{ab}} + \text{定数}$$

ここまで書いて何ですが、雨粒の終端速度の散布図を示しますが、大きさの2乗にも平方根にも比例はしていません。

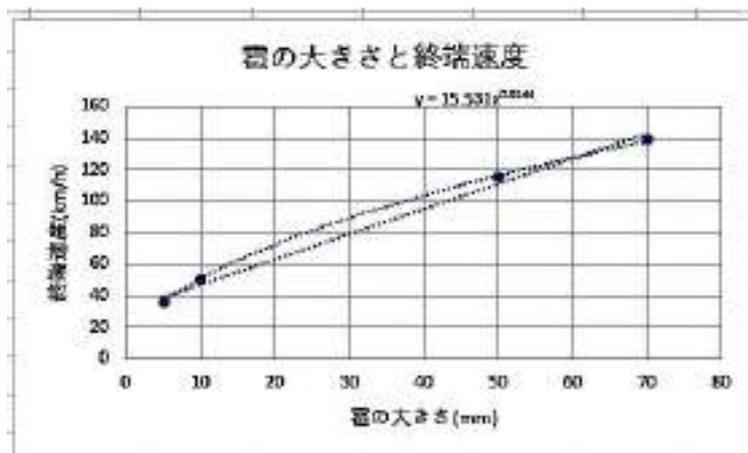


でも、雹の終端速度は、大きさの平方根に比例していました。データは、次の URL からです。

<https://weathernews.jp/s/topics/201704/030055/>



エクセルの計算式は、 $y = 15.331x^{0.5144}$ です。



対称魔方陣 (改版) 2023.6 うさみなおひで

自然方陣

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

この方陣を自然方陣と言います。
 この方陣では、こんなことが成り立っています。
 中心対称に位置する 2 数の和は、17 となる。
 このことを「対称性がある」と言います。

自然方陣は、魔方陣ではありません。こんなことをすると、魔方陣に化けます。

◎辺に属するが隅にない 8 セルの数を
 中心対称に取り替えてください。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

中心対称に

 ”取り替える”

こんな方陣になりました。

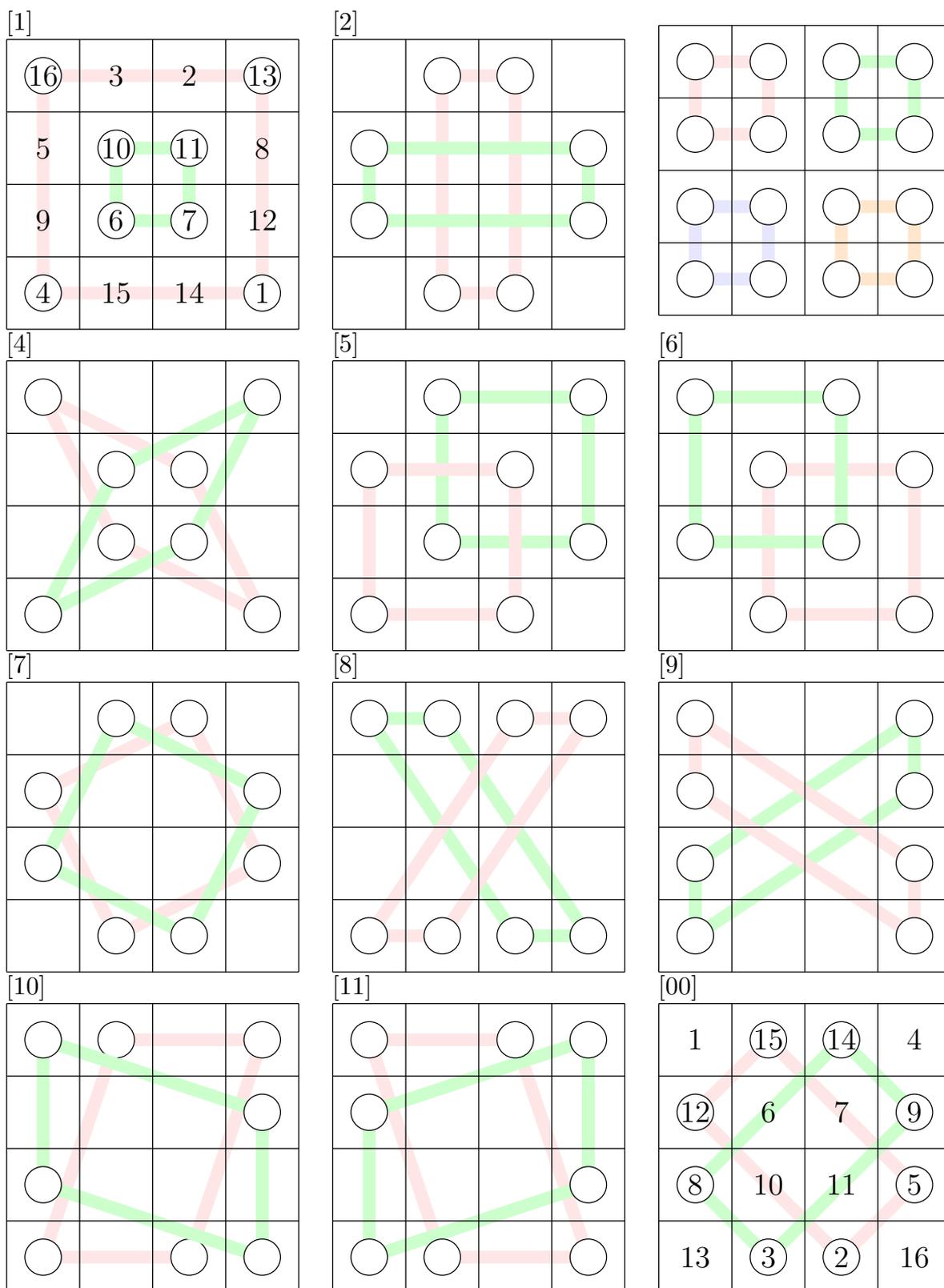
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

この方陣には、「対称」らしい、定和のパターンがいくつもみられます。

—— それが、私が魔法陣とお近づきになった最大の理由です。

この魔法陣には対称性があるので、対称魔法陣と言います。それが名前の由来です。

私の**魔方陣との出会い**は、「素晴らしき数学世界」 Alex Bellos 2010 早川書房 2012 において、「面白そう」と興味を惹く図に出会った時です。

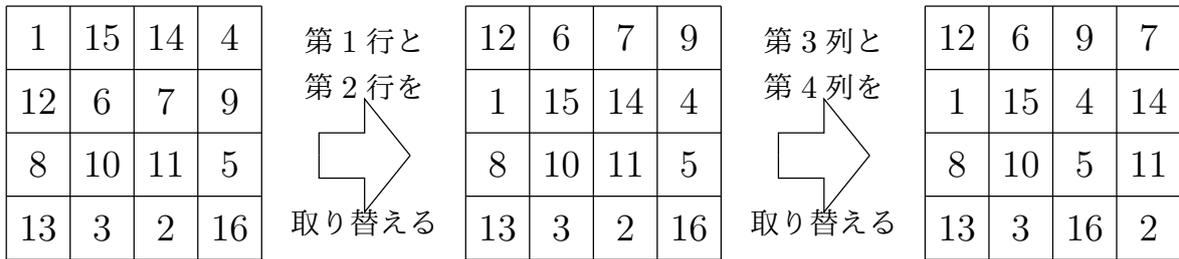


「デューラーの魔方陣は魔方陣を超えている．縦，横，対角線の列の和がそれぞれ 34 であるばかりか，上の図に丸で印されて四角形で結ばれている四つの数の和も 34 なのである．デューラーの魔方陣が繰り出すパターンには驚かされるばかりだ．」と著者は書いています．

なぜデューラーの魔方陣が，このような定和のパターンが，対称を感じさせるパターンが多いのかというと，デューラーの魔方陣は，対称魔方陣だからです．

対称魔法陣と汎魔方陣の関係

この二種類の魔法陣は簡単な変換で結びついています。勝手な魔法陣に、次の一連の変換を施すと。



となります。もとは対称魔方陣だったのですが...，こんなことをしたら普通，魔方陣であることは期待できません。ところが，対角線の和を調べてみると，となります。

これは魔方陣なのです。ではどんな魔方陣でしょうか？

13	3	16	2
12	6	9	7
1	15	4	14
8	10	5	11

続けて，第4行を第1行の上に移すと

8	10	5	11
13	3	16	2
12	6	9	7
1	15	4	14

なんと，対角線の和がとなります。はて，これは汎魔方陣か？！

確かめてみましょう!! 何をするかというど、右の汎魔方陣の公式に対して、上の一連の変換の逆を施してみましょう。

0	$a + b + d$	$a + c$	$b + c + d$
$a + b + c$	$c + d$	b	$d + a$
$b + d$	a	x	c
$a + c + d$	$b + c$	d	$a + b$

すると，

「神輿を担ぐ人にかかる重量の疑問点をいくつか」

京都 中山 淳

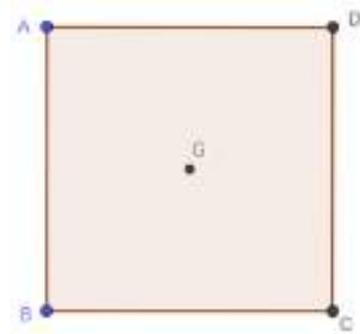
『この数学、いったいつ使うことになるの?』(Hal Saunders 著、森園子・鵜飼輝子・二宮智子 訳、共立出版、2019) という本をパラパラめくっていたら P.31 に、長方形の面に荷重がかかっている問題がありました。詳しく読んでいくと、普通はこの長方形の面の重心は縦にも横に関しても中央にあります。ところが、縦には中央だが、横には中央から少しずれているという場合の4隅にかかる重みはいくらか? みたいな問題がありました。

これを自分なりに解釈をして、本にあった長方形の形を $3\text{m} \times 3\text{m}$ の神輿に変えて、重さは 60kg の体重の人が乗っている場合で考えてみました。

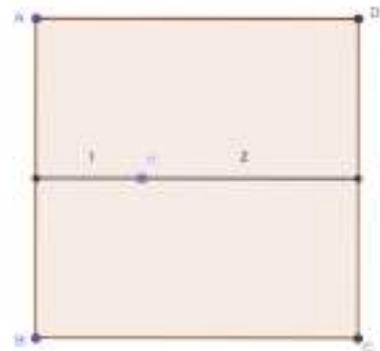
設定「 $3\text{m} \times 3\text{m}$ の神輿があります。この神輿に乗っている人の体重は 60kg です」

次の問に答えてください。

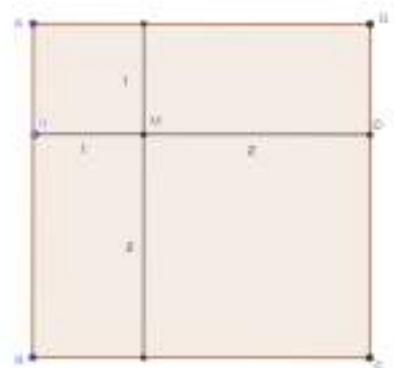
質問① 右図のように、縦にも横にも中央の位置 G に人が乗っている。4隅 A、B、C、D の人にかかる重みはいくらですか?



質問② 図のように、縦には中央だが、横の中央から左側に 50cm ずれたところ H に人が乗っている。4隅 A、B、C、D の人にかかる重みはいくらですか?



質問③ 図のように神輿の重心の位置から、横に 50cm 、縦に 50cm ずれたところ M に人が乗っている。4隅 A、B、C、D の人にかかる重みはいくらですか?



この質問①-③を振り返ってみての考察

これはモーメントの範囲になると思うが、4隅A、B、C、Dの人にかかる重みは面積と関係があるのではないだろうか？

質問①であれば、図のように面積比はどれも等しいのでAには15kgかかる。

質問②であれば、1:2で分けられるのでAには20kgかかる。

質問③の場合は、1:2:4:2で分けられるので、Aには $60 \times 4/9$ かかる。

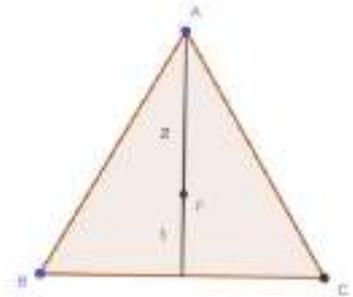
次はこの神輿の形を変えてみる。長方形から正三角形に変えてみる。

当然、この正三角形の神輿の重心は図のようなところにある。

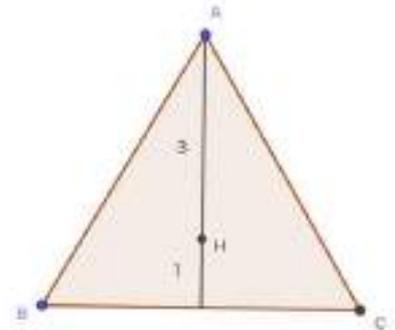
この神輿に乗っている人の体重は前問と同様に60kgです。

次の問いに答えてください。

質問④ 図のように、AMを2:1に内分する点Fのところ(重心)に人が乗っている。3隅A、B、Cの人にかかる重みはいくらですか？



質問⑤ 図のように、AMを3:1に内分する点Hに人が乗っている。3隅A、B、Cの人にかかる重みはいくらですか？



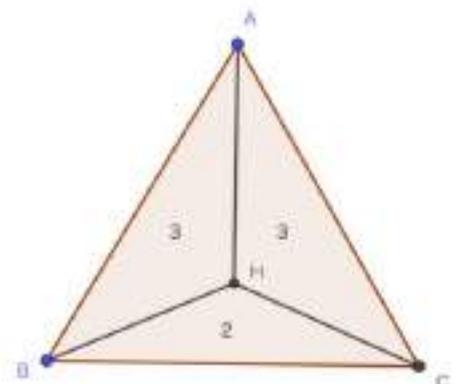
この質問④-⑤を振り返ってみての考察

質問④であれば、図のように面積比はどれも等しいのでAには15kgかかる。

質問⑤ 図のように、AMを3:1に内分する点Hに人が乗っている、面積比を考えると

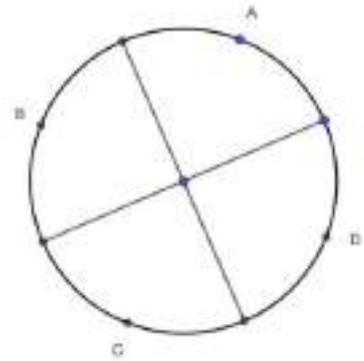
$$\triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH = 3 : 2 : 3$$

だから、Aの人にかかる重量は、 $60 \times 2/8 = 15\text{kg}$ で良いのか？

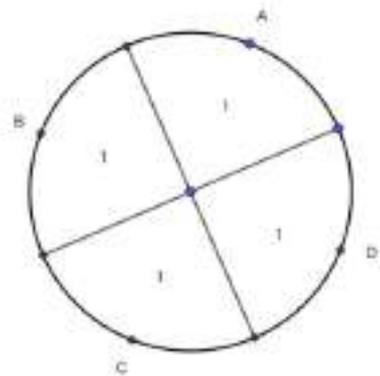


もっと発展させて、神輿の形を直径 3m の円形で考えてみる。
 質問⑥ 図のように、円の中心 O に 60kg の人が乗っている。

4 隅 A、B、C、D の人にかかる重みはいくらですか？

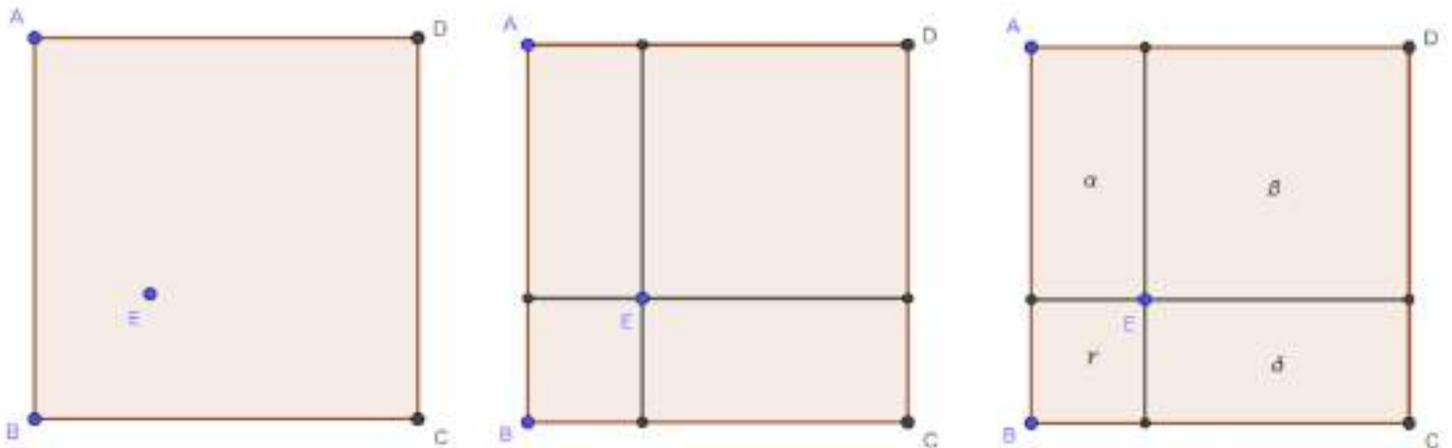


この質問⑥を振り返ってみての考察
 質問⑥であれば、図のように面積比はどれも
 等しいので A には 15kg かかるのか？



このレポートでの解決したい疑問点

正方形であれば、内部に適当に点を取った場合は、辺に平行線を引いて、4つの部屋に分ける。4つの角のうちの1つの角 A にかかる重量は、対角の面の面積比で求めることができるのか？



この図の場合、A の人にかかる重量は、全体を $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ とすると、
 $60\text{kg} \times \delta / \text{全体}$ の式で良いのか？

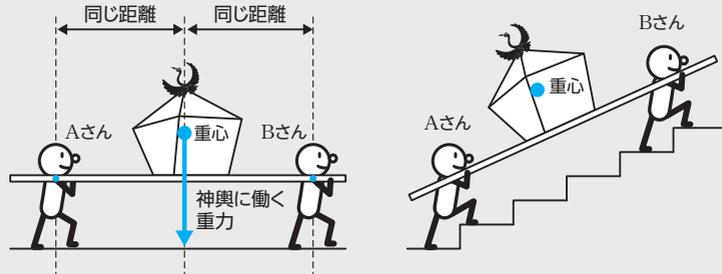


神輿の前と後ろはどちらが大変か？

—— 重力と重心、ベクトルのつり合いとモーメントのつり合い

問題

祭りで神輿^{みこし}を担いでいると、階段を上り下りしなくてはならないことがあります。階段の上側の人と下側の人で大変さは違うのでしょうか？



図のように50kgの神輿を担ぎました。AさんとBさんは重心から同じ距離の場所を支えています。Bさんが階段の上側にいるとき、大きな力で担がなくてはならないのは、AさんとBさんのどちらでしょうか？

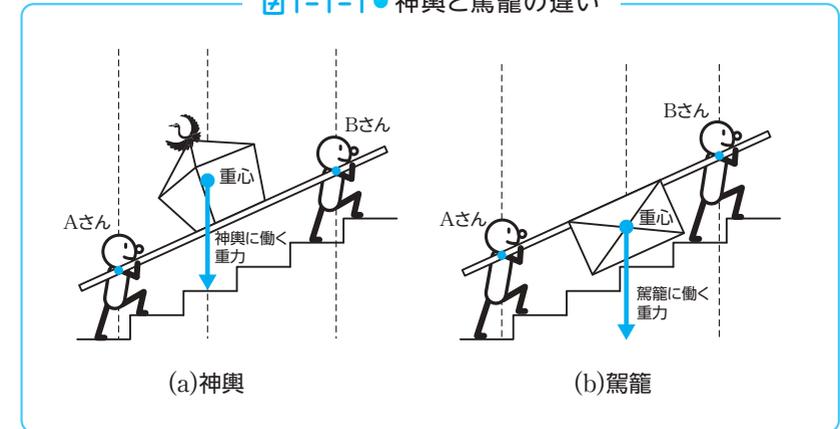
- A：Aさん（下側） B：Bさん（上側） C：どちらも同じ
D：階段を上っているか下っているかで違う



考えるヒント

実は、担いでいるのが神輿（棒の上に箱がある）か駕籠^{かご}（棒の下に箱がある）かで、どちらの人が大変かは変わってきます。

図1-1-1 ● 神輿と駕籠の違い



問題の答 A

神輿のように棒の上に箱が載っているときは、階段を上っているか下っているかに関係なく、階段の下側の人が大変な思いをしています。反対に、駕籠の場合は階段の上側の人が大変になります。その違いは、重心に近いかどうかというところにあります。

● 重心までの水平距離が短い方が大変

平らな地面の場所では、AさんとBさんは神輿の重心から同じ距離にいますので、2人の支える力は同じはずですが、神輿が傾くと**重心**（重力の働く点：ここでは神輿の中心を重心としています）がAさんの方に寄ってしまいます。Aさん、Bさんから神輿や駕籠の重心までの水平距離を比べてみましょう。



図1-1-2 ● 重心に近いほど支える力が大きい

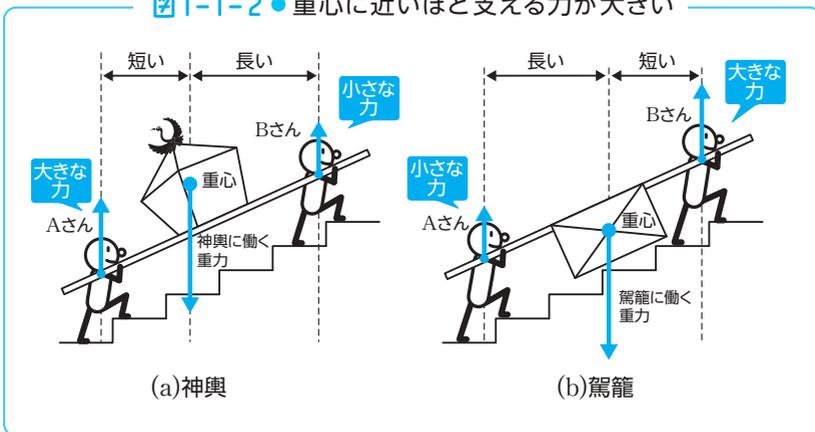


図1-1-2(a)を見ると、階段の下側にいるAさんの方が重心に近い
ため、Aさんの方が大変な思いをしていることがわかります。もちろ
んこの先に下りの階段があれば、今度は先に下りるBさんが頑張る番
です。

また、駕籠を運ぶ場合のように、棒の下に箱がある場合では、階段
の上側にいるBさんの方が大変な思いをします。図1-1-2(b)のよう
に、Bさんの方が重心に近くなるので、Bさんの方が大きな力で支え
る必要があるのです。机などの大きなものを運ぶときも、下端を持つ
か上端を持つかで大変さが変わってくるのです。



より深く学ぶために

● 質量に比例して重力が働く

力の大きさの単位は〔N〕（ニュートン：有名な物理学者アイザック・
ニュートンの名前）で表します。質量が1kgの物体に地表付近で働く
重力の大きさが9.8Nです。つまり、50kgの神輿に働く重力の大きさは
490Nです。

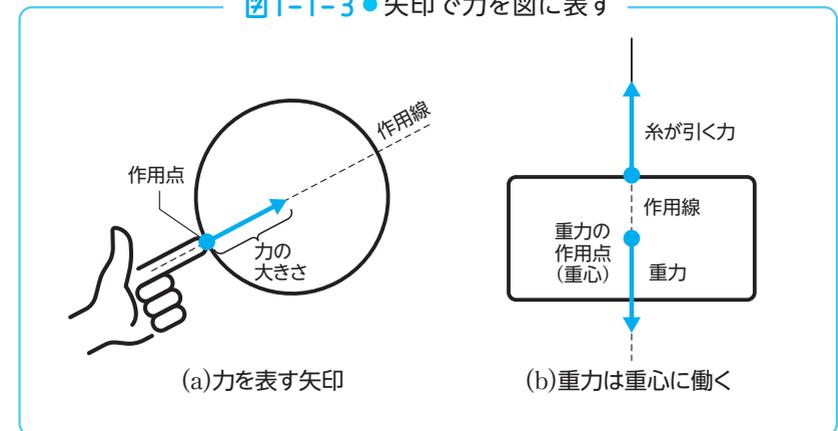
物体に働く重力の大きさ〔N〕＝物体の質量〔kg〕×9.8
50kgの神輿に働く重力の大きさ〔N〕＝50×9.8＝490N

日常生活では「質量」と「重力」を区別せず「重さ」と呼びますが、
上空に昇っていくと「質量」は変わらないのに「重力」が小さくなっ
て行くため、物理の世界では区別して呼びます。

● 力には向きと大きさがある

「力」には大きさだけでなく向きもあるので、力の働く場所（**作用
点**）を始点にして、力の働く向きの矢印で力を表します。この矢印を
「**ベクトル**」と呼びます。図1-1-3のように、力の大きさは矢印の長
さで表し（長さ1cmの矢印で10Nの力を表すなど、比率はその都度
決めます）、力の働く方向を示す破線を**作用線**と呼んでいます。

図1-1-3 ● 矢印で力を図に表す



重力は物体の各部分に働いているのですが、それらを足し合わせた
力が一点に集中して働いていると考えることができます。この点を**重
心**と呼び、重心の位置は、糸でつり下げたときに糸が引く力の作用線
上にあります。



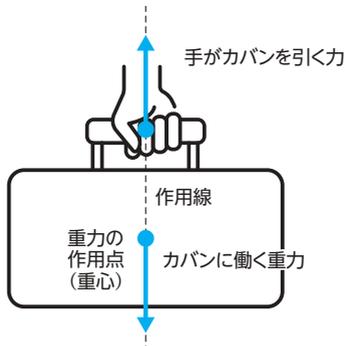
●ベクトルのつり合いを考えると、支える力の和がわかる

重力が働く物体は、重力の作用線上に力を加えれば（つまり、重心の下を持つ、重心の上を糸で引くなどすれば）、支えることができます。このとき、支える力は重力と同じ大きさです。このとき2つの力の矢印（ベクトル）は同じ長さで逆向きになるため、「物体に働く2つの力（ベクトル）がつり合っている」と言います。

物体に働く2つの力（ベクトル）がつり合っている

=2つの力が同一作用線上で逆向きに同じ大きさで働いている

図1-1-4 ●カバンに働く力（ベクトル）がつり合う



2人で手分けして支えるときには、2人の支える力の和（これを「合力：ごうりょく」と言います）が重力とつり合っています。

Aさんが支える力とBさんが支える力の合力

= 神輿に働く重力と同じ大きさ（490N）で逆向き

●モーメントのつり合いを考えると、支える力の比率がわかる

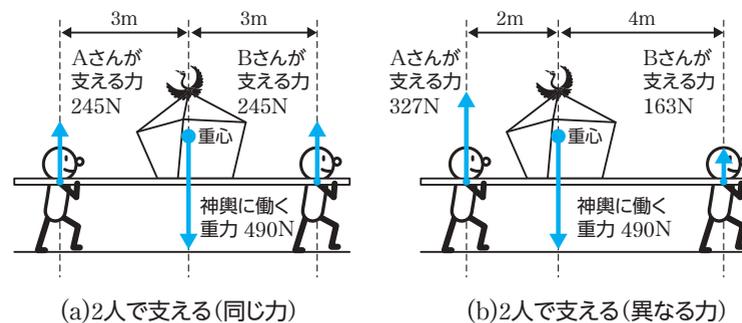
2人が支える力の合力の大きさは490Nとわかりましたが、その比率はどうなっているのでしょうか？ 図1-1-5のように、2人が支える力の比率は、重力の作用線からの距離で決まります。天秤の計算と同じように、重力の作用線からの距離と支える力の大きさの積がそれ

ぞれ等しくなっているのです。

重力の作用線からAさんまでの距離 × Aさんが支える力の大きさ

= 重力の作用線からBさんまでの距離 × Bさんが支える力の大きさ

図1-1-5 ●神輿に働く力のモーメントがつり合う



Aさんの力が強すぎると神輿は時計回りに回転してしまい、Bさんの力が強すぎると反時計回りに回転してしまいます。このことから、上の式にあるような「距離」と「力の大きさ」の積を「回転作用（モーメント）」と呼んでいます。神輿が安定して支えられているとき、Aさんが支える力のモーメントと、Bさんが支える力のモーメントがつり合っているのです。

「ベクトルのつり合い」と「モーメントのつり合い」とを合わせて考えると、2人の支える力の大きさを求めることができます。

- ▶ 2人の支える力の合力（ベクトル）と、神輿に働く重力（ベクトル）がつり合う
- ▶ Aさんの支える力のモーメントと、Bさんの支える力のモーメントがつり合う

この問題では、2人の支える力の合力は490Nになるはずですが。図



4-1

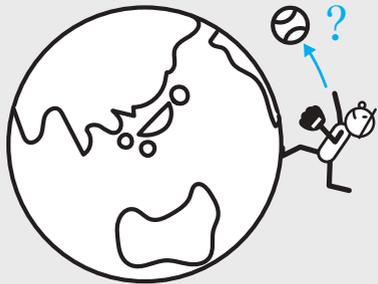


地球を周回する豪速球は投げられるか？

—— 等速円運動の速度・角速度・向心加速度・向心力・周期、第1宇宙速度

問題

野球の投手が投げた球は、常に重力が働いて落下していきます。でも、もし驚異的な豪速球を投げることができたら、球をいつまでも地面に落下させないことはできるのでしょうか？



空気抵抗が働くとどんどん減速してしまいますので、ここでは空気抵抗の影響がないと仮定しましょう。地球がきれいな球形で、山や建物がないとすると、どのくらいの速さで球を投げれば、球を落下させずに地球を周回させることが可能なのでしょうか？

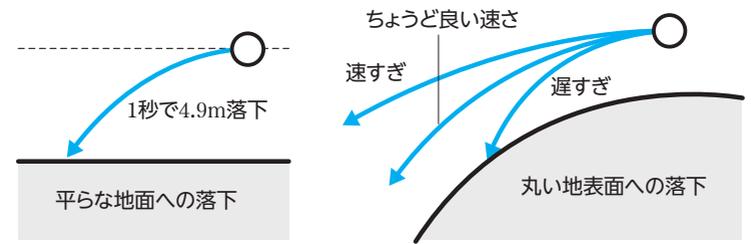
- A : 80m/s (288km/h) B : 800m/s (2,880km/h)
 C : 8,000m/s (28,800km/h) D : 無限大の速さ



考えるヒント

地面が平らであると仮定すると、手を離れた物体は、重力により $\frac{1}{2} \times 9.8 \times \text{落下時間}^2$ という距離だけ落下します。つまり、どんな豪速球でも1秒間進む間に4.9m落下するのです。人間の身長を考えれば、水平方向に投げられた球は、必ず1秒以内に地面へ落下することになります。

図 4-1-1 ● いつまでも地面に落ちない球を投げる



しかし、地球の表面は丸いので、重力による落下と地面の丸みがちょうど合えば、いつまでも地面に到達しないのです！逆に球が速すぎると、宇宙の彼方へ飛んで行ってしまうことにもなります。重力は地球の中心に向かって働くため、球が周回すると重力の働く向きも変わるという点を考慮して、球の速さを考えてみましょう。

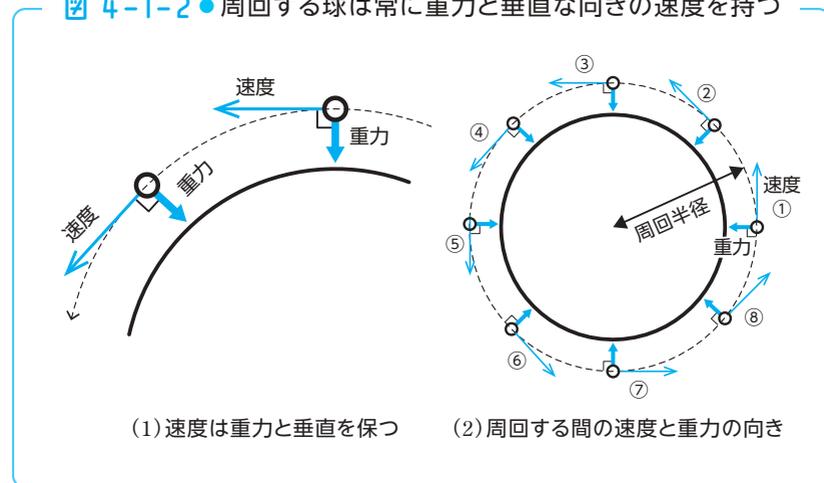
問題の答 C

正解は正確には7,894m/sです。もしこんな速球を投げることができたなら、球は水平方向に飛び続けるので、鉛直方向に働く「重力の向き」に対して「速度の向き」を垂直に保ちながら球が地球を周回するのです。このような動きを「**等速円運動**」と呼びます。



図4-1-2のように、速さを一定に保ってうまく周回するためには速さと重力のバランスが重要です。そこで、速度の変化から加速度を求めれば、加速度と力には運動方程式が成り立つため、そのバランスを考えることができるようになります。

図 4-1-2 ● 周回する球は常に重力と垂直な向き of 速度を持つ



球の速度は図のように矢印で表されます。ここでは、速度の大きさ（つまり速さ）と速度の向きに分けて考えるのがポイントです。円周の長さ（ $2 \times 3.14 \times$ 周回半径）を、球が一周するのにかかる時間（物理では「**周期**」と呼びます）で割ったものが、球の速さです。この速さを一定に保ったまま速度の向きだけが回転するのが等速円運動です。

$$\begin{aligned} \text{球の速さ} [\text{m/s}] &= \frac{\text{円周の長さ} [\text{m}]}{\text{1周にかかる時間} [\text{s}]} \\ &= \frac{2 \times 3.14 \times \text{周回半径} [\text{m}]}{\text{周期} [\text{s}]} \end{aligned}$$

球の速度の向き：球が1周する間に速度の向きも1周する

では、球が地球を1周する間の、速度を表す矢印（ベクトル）の変化を考えてみましょう。次の図のように矢印の始点を集めると、矢印

の先端が円を描くように変化することがわかります。

図 4-1-3 ● 球が1周する間に速度の向きも1周する

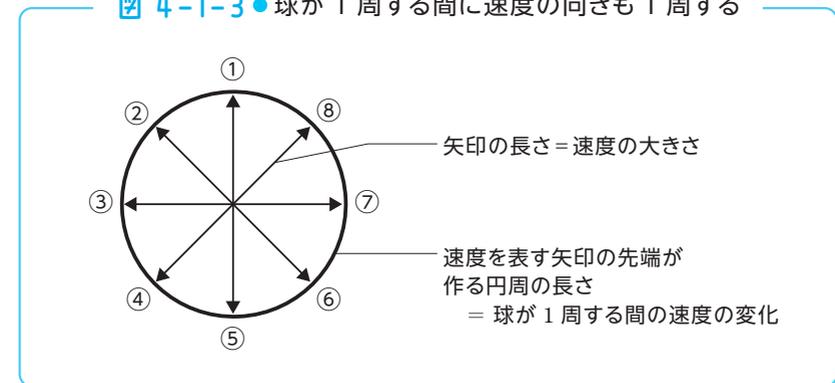


図4-1-3の速度の矢印が描く円周の長さが「球が1周する間の速度の変化」です。これを周期で割ったものが球の加速度です。

$$\begin{aligned} \text{球の加速度の大きさ} [\text{m/s}^2] &= \frac{\text{球が1周する間の速度の変化} [\text{m/s}]}{\text{周期} [\text{s}]} \\ &= \frac{2 \times 3.14 \times \text{速さ} [\text{m/s}]}{\text{周期} [\text{s}]} \end{aligned}$$

ここで、周期は図4-1-2 (2) の円周の長さ（ $2 \times 3.14 \times$ 周回半径）を速さで割った値なので、球の加速度の大きさは次のように計算できます。

$$\begin{aligned} \text{球の加速度の大きさ} [\text{m/s}^2] &= \frac{2 \times 3.14 \times \text{速さ} [\text{m/s}]}{\left(\frac{2 \times 3.14 \times \text{周回半径} [\text{m}]}{\text{速さ} [\text{m/s}]} \right)} \\ &= \frac{\text{速さ} [\text{m/s}]^2}{\text{周回半径} [\text{m}]} \end{aligned}$$

ここで、周回半径が637万m、球が重力に引かれることで生じている加速度は 9.8m/s^2 であることから、周回する速さが約7,901m/s、つまり約7.9km/s（約28,400km/h）であることがわかります。



これが、重力を受けて落ちながらうまく地球を周回する球の速さです。この速さは地表面すれすれに人工衛星を飛ばす場合の衛星の速度の大きさであり、「**第1宇宙速度**」と呼ばれています。

地球を1周する距離は $2\pi \times$ 半径ですので、その距離を速さで割れば、1周にかかる時間（**周期**と呼びます）が計算できます。

$$\text{周期} = \frac{2 \times 3.14 \times 6,370,000\text{m}}{7,901\text{m/s}} = \text{約}5,063 \text{秒 (約}84 \text{分)}$$

もちろん人工衛星は、空気抵抗で失速しないように、ずっと上空の空気の薄い高さで飛ばされています。そのため周回距離が長くなるだけでなく、重力が弱いために周回に必要な速さもやや遅めで良いので、一周するのにかかる時間は90分以上になります。



より深く学ぶために

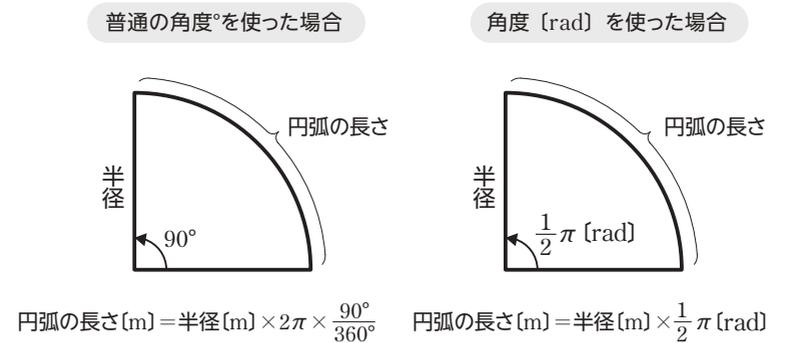
● 角度の単位を変えると回転運動が簡単に表せる

人工衛星のように一定の速さで周回する運動を「**等速円運動**」と呼びます。等速円運動する物体の特徴は、速度の向きが変わっていくのに速さ（速度の大きさ）が変わらない点です。

円運動を考えると、物理学では回転角の単位に「rad」を使います。これまで円周の長さを $2 \times 3.14 \times$ 半径と書いてきましたが、3.14は円周率 π の大きさを途中まで書いたものです。実際には長く続く数値ですので、 π と書いた方が正確です。

さて、「rad」という角度の単位は、円周の長さ（半径 $\times 2\pi$ ）と円の半径の比である 2π を使って $360^\circ = 2\pi$ [rad] としたもので、「ラジアン」と読みます。この単位を使うと、扇型の円弧の長さを半径に角度をかけただけで算出できるという優れたものです。

図 4-1-4 ● 便利な角度の単位 [rad]



ここで「rad」という単位は円弧の長さと半径の比を表しているものなので、「m」に「rad」をかけても「m」になります。

● 角速度を使って等速円運動する物体の速度を表す

このradという単位を使うと、等速円運動する物体の速度（円周の長さ \div 周期）を次のように「**角速度**」を使って表すことができます。

図 4-1-5 ● [rad] を使って等速円運動する物体の速度を表す



角速度というのは1周分の角度である 2π [rad] を周期 [s] で割ったもので、1秒あたりに回転する角度を表しています。



6-4



方位磁針なしでなぜ方角がわかるのか？

—— 磁場、地磁気、磁束密度、ローレンツ力、ホール効果、モーター、電流の作る磁場、透磁率

問題

スマートフォンで地図を利用しているときに、電話自体がどの方角を向いているのかを瞬時に捉える磁気センサーが作動しています。このセンサーはどのような原理で動いているのでしょうか？



磁気センサーにはいくつかの種類がありますが、そのひとつに、磁気によって電圧が発生する「ホール素子」と呼ばれるものがあります。生じる電圧のプラス・マイナスの向きと強さから、スマートフォンの向きがわかります。

地球の地磁気は南北方向ですが、その中でこのセンサーを作動させると、どのような方向に電圧が生じるのでしょうか？

- A：東西方向 B：南北方向 C：上下方向



考えるヒント

地磁気の中で方位磁針は南北方向を向き、色の塗られている方が北を指します。ホール素子の場合、内部に流している電流に対して磁気が発生して電圧が発生します。そのため、素子の置かれた方向によって電流の方向が変わり、発生する電圧の方向も変わります。地磁気の方法と電流の方向を考慮して、電圧の方向を予想してみましょう。

問題の答 AまたはC

地磁気がなぜ存在するのかは、実はまだよくわかっていません。しかし、北極付近をS極、南極付近をN極とするひとつの磁石として考えられるような地磁気が地球の周りに作られていることは間違いありません。この地磁気の様子を図に示したものが図6-4-1です。図中の矢印がついた線は磁力線で、密度が大きな場所ほど強い磁力が働きます。磁力は「磁場」と呼ばれる磁気的な空間の歪みを介して働きます。

図 6-4-1 ● 地磁気の様子

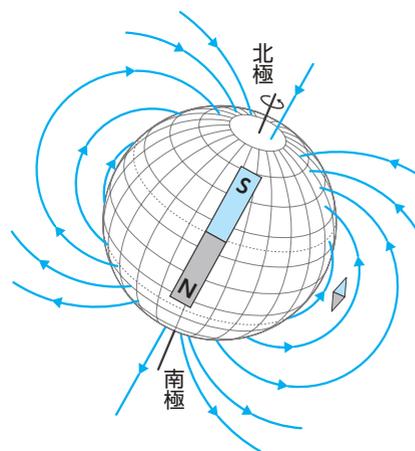


図 6-4-2 ●

フレミングの左手の法則



ホール素子に発生する電圧の方向は、地磁気の方角にも、電流の方角にも垂直です。これは、磁石の近くで電流を流すと導線に力が働く現象と関係があります。その力の大きさは磁場の強さや電流の強さ、導線の長さに比例し、力の向きは「**フレミングの左手の法則**」(図6-4-2)で示されています。この法則は19世紀の終わりにイギリスの電気工学者のジョン・フレミングが考案したもので、磁場の方向とも電流の方向とも直交する向きに力が働くことを示しています。

図 6-4-3 ● ホール素子の仕組み

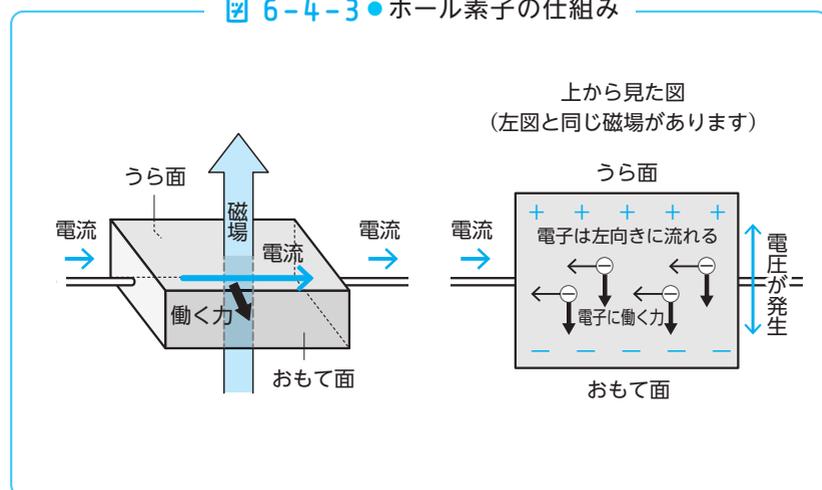


図6-4-3がホール素子の仕組みです。図の「磁場」と書いてある矢印の向きに地磁気があるとき、右向きに流れる電流に働く力の向きは、素子のうら面からおもて面に向かう向きです。ホール素子には電流の正体が正の電荷の場合と負の電荷(電子)の場合があります。図は電流の正体が電子の流れである場合の例で、力を受けた電子がおもて面に集まるため、おもて面にマイナス、うら面にプラスの電荷が現れるため、おもて面とうら面の間に電圧が発生します。地磁気は南北方向ですので、生じる電圧の向きは電流が東西方向に流れていればCの上下方向、電流が上下方向に流れていればAの東西方向となります。

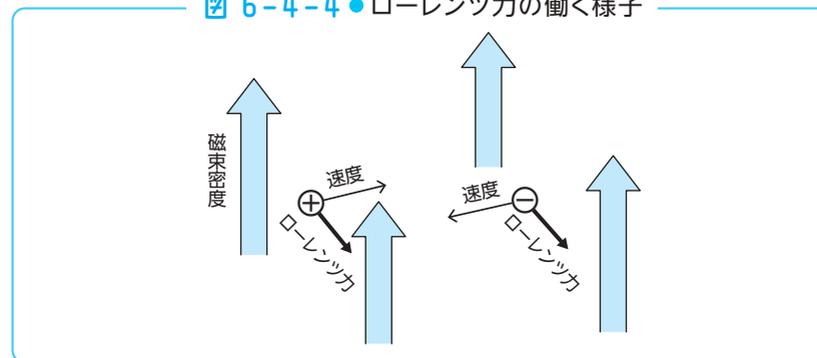
より深く学ぶために

● 速度を持った荷電粒子には磁場からローレンツ力が働く

電流が磁場から受ける力は、電流の正体である荷電粒子が磁場の中で速度を持って運動することによって生じており「**ローレンツ力**」と呼ばれています。ローレンツ力の大きさは荷電粒子の電気量と速度、磁場の「**磁束密度**」という値(単位は[T](テスラ))の3つの要素によって決まります。荷電粒子の速度が磁束密度に対して垂直な場合、ローレンツ力は以下ようになります。

ローレンツ力の大きさ = 荷電粒子の電気量 × 速さ × 磁束密度の大きさ
ローレンツ力の向き = 速度と磁束密度に対して右ねじの関係の向き

図 6-4-4 ● ローレンツ力の働く様子



「**右ねじの関係**」の向きというのは、図6-4-5に示したような向きのことで、右ねじの頭を速度の向きから磁束密度の向きへと回転させたときに右ねじが進む向きという意味です。右ねじの関係の向きをわかりやすく示したのがフレミングの左手の法則です。ローレンツ力の場合は、中指 = 正の荷電粒子の速度(電流)の向き、人差し指 = 磁束密度の向き、親指 = 正の荷電粒子に働く力の向きです。負の荷電粒子に働く力の向きは逆向きになります。

図 6-4-5 ● 右ねじの関係の向き



流れる荷電粒子1つひとつがローレンツ力を受けるため、導線に働く力は導線の中を流れる荷電粒子が受ける力を足し合わせたものですので、電流が磁束密度に対して垂直な場合は、以下ようになります。

電流が流れる導線に磁場から働く力の大きさ

$$\begin{aligned}
 &= \text{導線内の荷電粒子数} \times \text{荷電粒子ひとつに働くローレンツ力} \\
 &= (\text{荷電粒子の密度} \times \text{導線の断面積} \times \text{導線の長さ}) \\
 &\quad \times (\text{荷電粒子の電気量} \times \text{速さ} \times \text{磁束密度の大きさ})
 \end{aligned}$$

ここで、第6章2節で紹介したように、電流は（荷電粒子の電荷×荷電粒子の密度×導線の断面積×荷電粒子の速さ）ですので、これを使うと電流が流れる導線に磁場から働く力が表せます。

電流が流れる導線に磁場から働く力の大きさ

$$= \text{電流の大きさ} \times \text{磁束密度の大きさ} \times \text{導線の長さ}$$

● ホール効果によって生じる電圧から磁場を知る

磁場の中でホール素子に電流を流すと磁場にも電流にも垂直な方向に電圧が生じる現象は1879年にアメリカの物理学者エドウィン・ホー

ルが発見したため「**ホール効果**」と呼ばれています。

図6-4-3に示したように、ローレンツ力によって電子がおもて面の方に寄ってくると、おもて面にマイナス、うら面にプラスの電荷が現れて電圧が発生します。ホール素子内部の電場が一樣だとすると、電場の強さは発生した電圧をホール素子の奥行きで割ったものとなります。

$$\text{電場の強さ} = \frac{\text{おもて面とうら面の間に生じた電圧}}{\text{素子の奥行き}}$$

これより、電子がこの電場から受ける電気力は次のようになります。

電気力の大きさ = 荷電粒子の電気量 × 電場の強さ

$$= \text{荷電粒子の電気量} \times \frac{\text{生じた電圧}}{\text{素子の奥行き}}$$

ここで電気力がローレンツ力の逆向きに働くことから、ローレンツ力と電気力が釣り合う状態で安定することがわかります。

ローレンツ力の大きさ = 電気力の大きさ

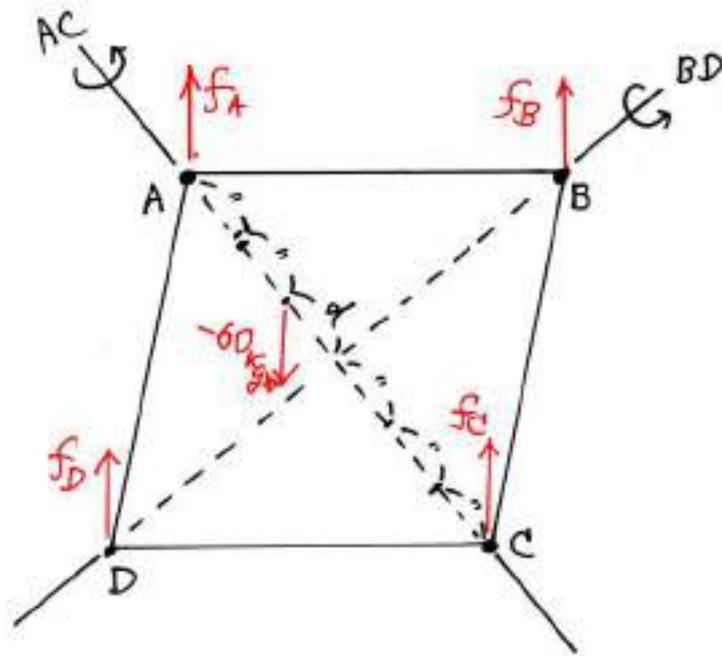
ローレンツ力の大きさは荷電粒子の電荷×速さ×磁束密度の大きさですので、測定する磁束密度の大きさは次のように表されます。荷電粒子の速さは電流の値からわかるので、生じた電圧を測定すればこの空間の磁束密度の向きと大きさを知ることができるのです。

$$\text{磁束密度の大きさ} = \frac{\text{おもて面とうら面の間に生じた電圧}}{\text{荷電粒子の速さ} \times \text{素子の奥行き}}$$

● ローレンツ力を応用してモーターを回す

導線を通る電荷が磁場から受ける力を応用して最も使われている技術は**モーター**です。モーターは、電流が磁場から受ける力を回転作用へと変換しています。次の図は、直流電流を流すと回転するモーターの仕組みを模式的に表したものです。





- 軸ACの回りのモーメント=0 となり $f_B \times 3d = f_D \times 3d \quad \therefore f_D = f_B \dots \textcircled{1}$
 - 軸BD " " となり $f_A \times 3d - 60 \times d = f_C \times 3d \quad \therefore f_C = f_A - 20 \dots \textcircled{2}$
 - 重力のつり合い となり $f_A + f_B + f_C + f_D = 60 \dots \textcircled{3}$
 - $\textcircled{2}$ に $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ を代入 $f_A + f_B + f_A - 20 + f_B = 60 \quad \therefore f_A = 40 - f_B \dots \textcircled{4}$
 - $\textcircled{2}$ に $\textcircled{4}$ を代入 $f_C = 40 - f_B - 20 \quad \therefore f_C = 20 - f_B \dots \textcircled{5}$
- f_B , $\textcircled{5}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ を表にすると

f_B	0	1	2	3	...	10	...	17	18	19	20	kgw
$\textcircled{5}$. $f_C = 20 - f_B$	20	19	18	17	...	10	...	3	2	1	0	
$\textcircled{1}$. $f_D = f_B$	0	1	2	3	...	10	...	17	18	19	20	
$\textcircled{4}$. $f_A = 40 - f_B$	40	39	38	37	...	30	...	23	22	21	20	

• B, D × C は力の弱い子と老・若人とも担げろ!

① 荷重 F を3点で支える場合、荷重 f_1, f_2, f_3 は

「 x 軸周りのモーメントのつり合い」…(1)

「 y 軸周りのモーメントのつり合い」…(2)

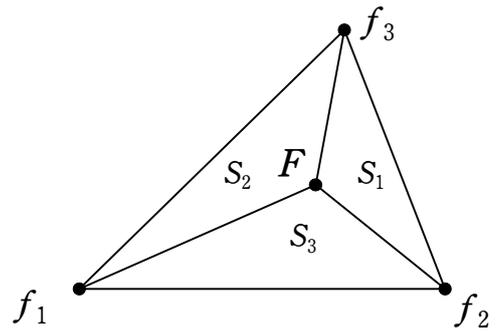
$$f_1 + f_2 + f_3 = F \dots (3)$$

から求まる。この場合、

図の面積を S_1, S_2, S_3 として

$$f_1 : f_2 : f_3 = S_1 : S_2 : S_3$$

(この性質はベクトルの演習の定番問題に使われる)



② 荷重 F を4点で支える場合、

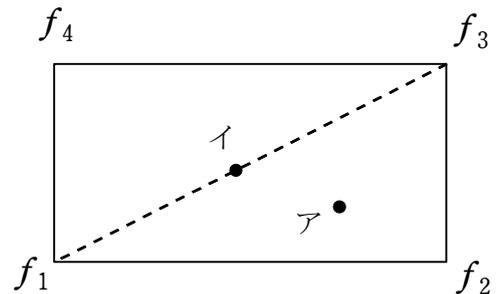
荷重 f_1, f_2, f_3, f_4 は

上式(1)(2)(3)だけでは、

未知数4個で式3個より、決まらない。

極端な場合、荷重 F が図のアの場合は $f_4 = 0$ 、

イの場合は $f_2 = f_4 = 0$ も可能。



③ しかし現実に荷重 F の載った長方形の板(重さは無視)を4本の同じ高さの柱に乗せると荷重は一通りに決まる。

例として図のように一辺の長さが5の正方形の4点で

荷重 $F=1$ が点(1, 2)にある場合を計算する。

まず4点にある柱をバネとする。

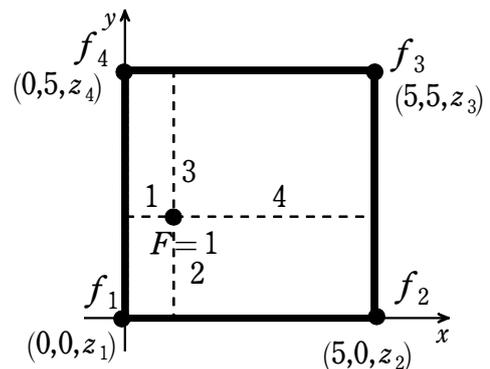
それぞれのバネの縮んだ長さを $z_1 \sim z_4$,

バネ定数を同じ k として荷重は

$$f_1 = kz_1, f_2 = kz_2, f_3 = kz_3, f_4 = kz_4 \dots (1)$$

また、4つの荷重点の空間座標を考える。ただし z 軸は下向きを正とし、

縮んだ長さ $z_1 \sim z_4$ を z 座標とする。



この4点は神輿の同一平面状にあるから ベクトルの共面条件より

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (s+t+u=1 \dots (2)) \quad \text{より} \quad \begin{cases} 0 = 5s + 5t \dots (3) \\ 0 = 5t + 5u \dots (4) \\ z_1 = sz_2 + tz_3 + uz_4 \dots (5) \end{cases}$$

$$(2)(3)(4) \text{より } s=1, t=-1, u=1$$

$$\text{よって(5)より } z_1 = z_2 - z_3 + z_4 \quad \text{これと(1)より } \frac{f_1}{k} = \frac{f_2}{k} - \frac{f_3}{k} + \frac{f_4}{k} \quad \text{よって } f_1 = f_2 - f_3 + f_4 \dots (6)$$

また、 x, y 軸周りのモーメントの総和=0 と $(f_1 \sim f_4 \text{の和}) = F$ より

$$5 \cdot f_3 + 5 \cdot f_4 = 1 \cdot 2 \dots (7) \quad 5 \cdot f_2 + 5 \cdot f_3 = 1 \cdot 1 \dots (8) \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \dots (9)$$

$$(6)(7)(8)(9) \text{で式が4つできたから、} f_1 \sim f_4 \text{が求まり、} (f_1, f_2, f_3, f_4) = \left(\frac{9}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20}, \frac{7}{20} \right)$$

この比は、面積とは無関係である。

4 まとめ

3点荷重の場合はモーメントのつり合いから求めたから面積比と関連があった。また、3点だから同一平面上にあるのは自明である。4点荷重の場合はモーメントのつり合いだけでは求まらず、同一平面上にあるという自明でない条件を使って求めた。また、柱をバネで置き換えた。変形しないように見える硬い柱でも実際は非常に硬いバネと考えることができ、 $z_1 \sim z_4$ は非常に小さい値であるからほぼ水平とみなせる。建築の構造計算などでもこういう方法を使うらしい。

(参考)

<https://www.tokaibane.com/topic/9376> (東海バネ工業HP)

「“ピタゴラス数の生成公式”の取り扱い方」

長野・和田 博

今年の数教協全国大会のプレ大会ミニ講座（6/03）にて、同名の表題で話をしました。まず、右左見さんの「8 : 4 の長方形から 3 : 4 : 5 の直角三角形を折る」「18 : 12 の長方形から 5 : 12 : 13 の直角三角形を折る」を実際に体験してもらい、次に前回 Zoom 例会での報告「“ピタゴラス数の公式”の図的証明」について説明して、そのあと前々回 Zoom 例会での報告「“ピタゴラス数の公式”の、変数を m , $(m - n)$ とする使い方」の授業での扱い方について提案しました。

今回は、以上について報告します。

1. 右左見さんの

「 $2 : 1 = 8 : 4$ の長方形から $3 : 4 : 5$ の直角三角形を折る」

「 $3 : 2 = 18 : 12$ の長方形から $5 : 12 : 13$ の直角三角形を折る」

「 $m : n = 2m^2 : 2mn$ の長方形から $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ の直角三角形を折る」

2. 「“ピタゴラス数の公式”の図的証明」

3. 「“ピタゴラス数の公式”の、変数を m , $(m - n)$ とする使い方」の授業での扱い方

「 $(m - n) = k$ つまり $n = m - k = m - 1, m - 2, m - 3, \dots$ 」のときの表を作りそれらの規則性を発見する。

表①.					表②.						
	m	n	$\langle n=m-1 \rangle$ $m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$		m	n	$\langle n=m-2 \rangle$ $m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
	2	1					3	1			
	3	2					4	2			
	4	3					5	3			
	5	4					6	4			
	6	5					7	5			
	7	6					8	6			
	8	7					9	7			
	9	8					10	8			
	10	9					11	9			
	11	10					12	10			
	12	11					13	11			
	13	12					14	12			
	14	13					15	13			
	15	14					16	14			
	16	15					17	15			
	17	16					18	16			
	18	17					19	17			
	19	18					20	18			
	20	19					21	19			
	21	20					22	20			
	22	21					23	21			
	23	22					24	22			
	24	23					25	23			

表③.					表④.						
	m	n	$\langle n=m-3 \rangle$ $m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$		m	n	$\langle n=m-4 \rangle$ $m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
	4	1					5	1			
	5	2					6	2			
	6	3					7	3			
	7	4					8	4			
	8	5					9	5			
	9	6					10	6			
	10	7					11	7			
	11	8					12	8			
	12	9					13	9			
	13	10					14	10			
	14	11					15	11			
	15	12					16	12			
	16	13					17	13			
	17	14					18	14			
	18	15					19	15			
	19	16					20	16			
	20	17					21	17			
	21	18					22	18			
	22	19					23	19			
	23	20					24	20			
	24	21					25	21			
	25	22					26	22			
	26	23					27	23			

表⑤.					表⑥.				
		<n=m-5>					<n=m-6>		
<i>m</i>	<i>n</i>	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$	<i>m</i>	<i>n</i>	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
6	1				7	1			
7	2				8	2			
8	3				9	3			
9	4				10	4			
10	5				11	5			
11	6				12	6			
12	7				13	7			
13	8				14	8			
14	9				15	9			
15	10				16	10			
16	11				17	11			
17	12				18	12			
18	13				19	13			
19	14				20	14			
20	15				21	15			
21	16				22	16			
22	17				23	17			
23	18				24	18			
24	19				25	19			
25	20				26	20			
26	21				27	21			
27	22				28	22			
28	23				29	23			

表⑦.				
		<n=m-7>		
<i>m</i>	<i>n</i>	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
8	1			
9	2			
10	3			
11	4			
12	5			
13	6			
14	7			
15	8			
16	9			
17	10			
18	11			
19	12			
20	13			
21	14			
22	15			
23	16			
24	17			
25	18			
26	19			
27	20			
28	21			
29	22			
30	23			

「“ピタゴラス数の生成公式”の取り扱い方」

長野・和田 博

“ピタゴラス数の生成公式”「直角三角形の辺の比 = $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 」は、大変美しく興味深い公式なのですが、「2変数 m, n 」であるためなのか証明は分かりにくく、使い勝手もあまり良くありません。そのため、「公式の図的意味が分かる証明方法」や「ピタゴラス三角形”を分類のしかた」など、授業での扱い方を提案します。

1. “ピタゴラス三角形”を「 $m : n = 2m^2 : 2mn$ の長方形」から作る

(別紙 6/8 の図①, 図②の長方形を切り取ってお使いください)

①. 右左見直英氏(愛知・西三数学サークル)の

「 $2 : 1 = 8 : 4$ の長方形から $3 : 4 : 5$ の直角三角形を作る」方法

- ・長方形を対角線で折ると、重ならない部分が「 $3 : 4 : 5$ の直角三角形」となり、重なる部分は二等辺三角形であるから開くと菱形となる。
- ・菱形のもう一方の対角線も折り、 $8 : 4$ の長方形を2等分するように折ると、その図により「菱形の一边が5である」ことを証明することができる。

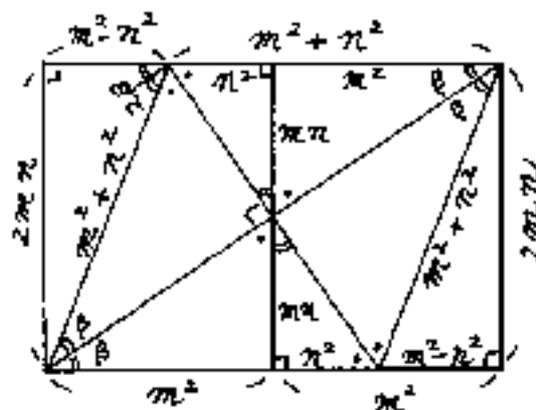
- ②. 「 $3 : 2 = 18 : 12$ の長方形から $5 : 12 : 13$ の直角三角形を作る」

- ③. 「 $m : n = 2m^2 : 2mn$ の長方形から $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ の直角三角形を作る」

長方形を対角線で折ると、
重なる部分は二等辺三角形であるから
開くと菱形となり、その一辺は右図より
 $m^2 + n^2$ である。

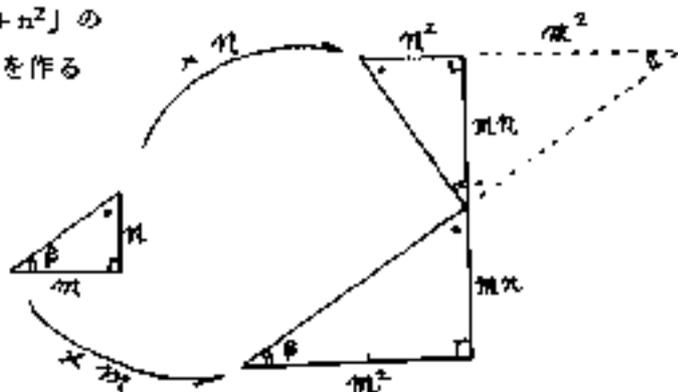
- ∴ 重ならない部分は、右図より
「 $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ の直角三角形」
となる。

- ∴ 「 $\tan\beta = n/m = \text{有理数}$ 」 のとき、
「 2β を内角とする直角三角形」は、
「辺の比 = $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 」
となる。



- ④. 「 $\tan\beta = n/m = \text{有理数}$ 」 の直角三角形を生成元として

「辺の比 = $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 」 の
「 2β を内角とする直角三角形」を作る



- ⑤. 「 $\tan\beta = n/m = \text{有理数}$ 」のとき、「 2β を内角とする直角三角形」は、
「 \tan の倍角公式」と「ピタゴラスの定理」によっても、

$$\tan 2\beta = 2\tan\beta / (1 - \tan^2\beta) = (2n/m) / (1 - n^2/m^2) = 2mn / (m^2 - n^2) ,$$

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 .$$

により「辺の比 = $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 」となる。

- ⑥. 複素数 $m + ni$ の2乗「 $(m + ni)^2 = m^2 - n^2 + 2mni$ 」
の図は、「ピタゴラス三角形」となる。



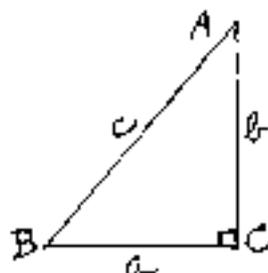
2. 「ピタゴラス三角形」の辺の比 = $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ 」の図的証明

「ピタゴラス三角形」の直角をはさむ角を α, β 、斜辺を c とするとき、

$$a : b : c = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 \quad \text{または}$$

$$b : a : c = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2, \quad m, n \text{ は } m > n \text{ の自然数.}$$

を証明する。



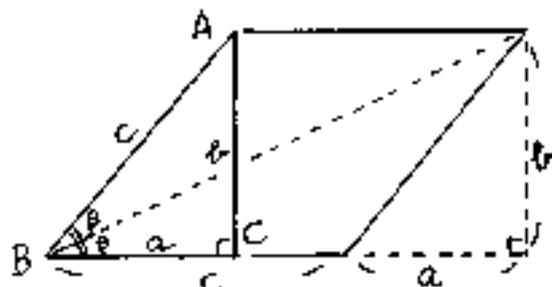
- ①. 「 $\angle B = 2\beta$ を鋭角の内角とする」菱形において、

$$\tan\beta = b/(c+a) = \text{有理数} .$$

$\therefore \tan\beta = n/m = 2mn/2m^2$ とおくことができて

$$a : b : c = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 .$$

が成り立つ。



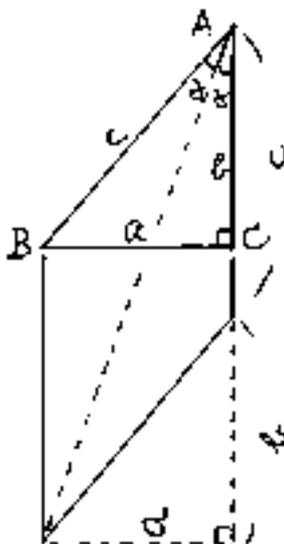
- ②. 「 $\angle A = 2\alpha$ を鋭角の内角とする」菱形において、

$$\tan\alpha = a/(c+b) = \text{有理数} .$$

$\therefore \tan\alpha = n/m = 2mn/2m^2$ とおくことができて

$$b : a : c = m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 .$$

が成り立つ。



3. 「 $m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2$ の直角三角形」を「 $n = m - 1, m - 2, m - 3, \dots$ 」の場合に分けることによる、「ピタゴラス三角形」の分類のしかた]

「直角をはさむ2辺 a, b 、斜辺 c 」とする。

・「 $n = m - 1$ 」の場合・・・表①より「 $c = b + 1$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 1)^2 : 2m(m - 1) : m^2 + (m - 1)^2 \\ &= 2m - 1 : 2m^2 - 2m : 2m^2 - 2m + 1 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 1 .$$

・「 $n = m - 2$ 」の場合・・・表②より「 $c = b + 2$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 2)^2 : 2m(m - 2) : m^2 + (m - 2)^2 \\ &= 4m - 4 : 2m^2 - 4m : 2m^2 - 4m + 4 = 2m - 2 : m^2 - 2m : m^2 - 2m + 2 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 2 .$$

・「 $n = m - 3$ 」の場合・・・表③より「 $c = b + 9$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 3)^2 : 2m(m - 3) : m^2 + (m - 3)^2 \\ &= 6m - 9 : 2m^2 - 6m : 2m^2 - 6m + 9 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 9 .$$

・「 $n = m - 4$ 」の場合・・・表④より「 $c = b + 8$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 4)^2 : 2m(m - 4) : m^2 + (m - 4)^2 \\ &= 8m - 16 : 2m^2 - 8m : 2m^2 - 8m + 16 = 4m - 8 : m^2 - 4m : m^2 - 4m + 8 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 8 .$$

・「 $n = m - 5$ 」の場合・・・表⑤より「 $c = b + 25$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 5)^2 : 2m(m - 5) : m^2 + (m - 5)^2 \\ &= 10m - 25 : 2m^2 - 10m : 2m^2 - 10m + 25 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 25 .$$

・「 $n = m - 6$ 」の場合・・・表⑥より「 $c = b + 18$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 6)^2 : 2m(m - 6) : m^2 + (m - 6)^2 \\ &= 12m - 36 : 2m^2 - 12m : 2m^2 - 12m + 36 \\ &= 6m - 18 : m^2 - 6m : m^2 - 6m + 18 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 18 .$$

・「 $n = m - 7$ 」の場合・・・表⑦より「 $c = b + 49$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - 7)^2 : 2m(m - 7) : m^2 + (m - 7)^2 \\ &= 14m - 49 : 2m^2 - 14m : 2m^2 - 14m + 49 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + 49 .$$

・・・

よって、「 $n = m - k$ 」の場合

・「 $k = (\text{奇数})$ 」のとき「 $c = b + k^2$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - k)^2 : 2m(m - k) : m^2 + (m - k)^2 \\ &= 2mk - k^2 : 2m^2 - 2mk : 2m^2 - 2mk + k^2 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + k^2 .$$

・「 $k = (\text{偶数})$ 」のとき「 $c = b + k^2/2$ 」

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 : 2mn : m^2 + n^2 &= m^2 - (m - k)^2 : 2m(m - k) : m^2 + (m - k)^2 \\ &= 2mk - k^2 : 2m^2 - 2mk : 2m^2 - 2mk + k^2 \\ &= mk - k^2/2 : m^2 - mk : m^2 - mk + k^2/2 . \end{aligned}$$

$$\therefore c = b + k^2/2 .$$

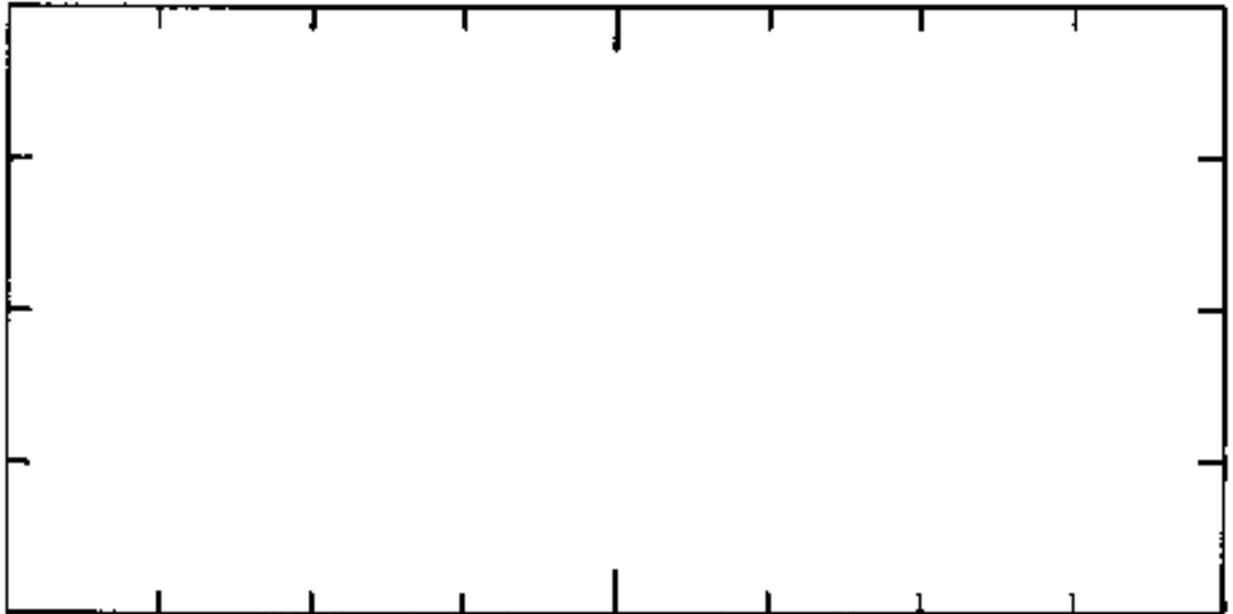
したがって、

$$\text{「斜辺と他の一辺との差」} = \{1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, \dots, (\text{奇数})^2\} .$$

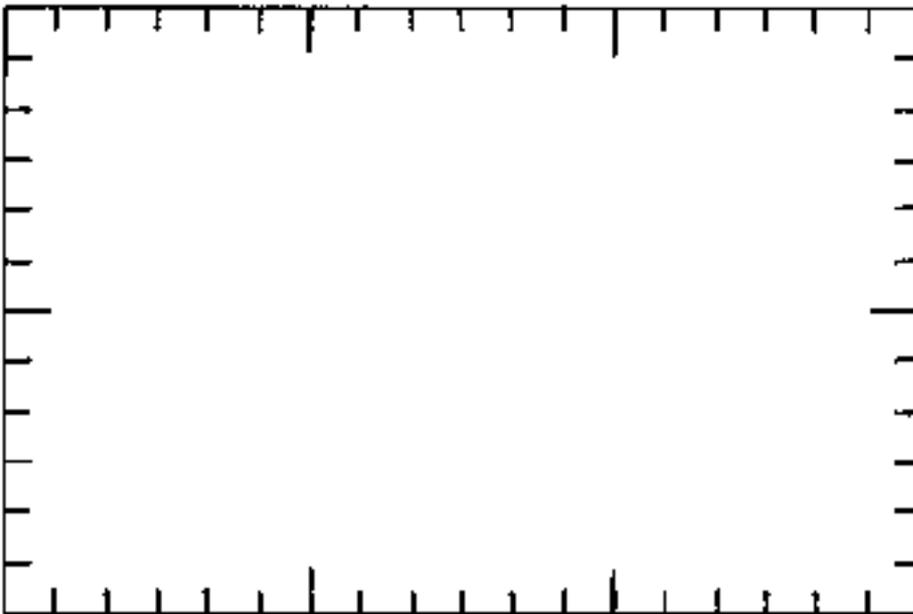
$$\{2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, \dots, (\text{偶数})^2/2\} .$$

により「ピタゴラス三角形を分類する」ことができる。

①



②



表①

		<n=m-1>		
m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
7	6	13	84	85
8	7	15	112	113
9	8	17	144	145
10	9	19	180	181
11	10	21	220	221
12	11	23	264	265
13	12	25	312	313
14	13	27	364	365
15	14	29	420	421
16	15	31	480	481
17	16	33	544	545
18	17	35	612	613
19	18	37	684	685
20	19	39	760	761
21	20	41	840	841
22	21	43	924	925
23	22	45	1012	1013
24	23	47	1104	1105

表②

		<n=m-2>		
m	n	a	b	c
3	1	4	3	5
4	2	6	8	10
5	3	8	15	17
6	4	10	24	26
7	5	12	35	37
8	6	14	48	50
9	7	15	63	65
10	8	18	80	82
11	9	20	99	101
12	10	22	120	122
13	11	24	143	145
14	12	26	168	170
15	13	28	195	197
16	14	30	224	226
17	15	32	255	257
18	16	34	288	290
19	17	36	323	325
20	18	38	360	362
21	19	40	399	401
22	20	42	440	442
23	21	44	483	485
24	22	46	528	530
25	23	48	575	577

表③

		<n=m-3>		
m	n	a	b	c
4	1	15	8	17
5	2	21	20	29
6	3	27	36	45
7	4	33	56	65
8	5	39	80	89
9	6	45	108	117
10	7	51	140	149
11	8	57	176	185
12	9	63	216	225
13	10	69	260	269
14	11	75	308	317
15	12	81	360	369
16	13	87	416	425
17	14	93	476	485
18	15	99	540	549
19	16	105	608	617
20	17	111	680	689
21	18	117	756	765
22	19	123	836	845
23	20	129	920	929
24	21	135	1008	1017
25	22	141	1100	1109
26	23	147	1196	1205

表④

		<n=m-4>		
m	n	a	b	c=b
5	1	12	5	19
6	2	16	12	20
7	3	20	21	29
8	4	24	32	40
9	5	28	45	59
10	6	32	60	68
11	7	36	77	85
12	8	40	96	104
13	9	44	117	125
14	10	48	140	148
15	11	52	165	173
16	12	56	192	200
17	13	60	221	229
18	14	64	252	260
19	15	68	285	293
20	16	72	320	328
21	17	76	357	365
22	18	80	396	404
23	19	84	437	445
24	20	88	480	488
25	21	92	525	533
26	22	96	572	580
27	23	100	621	629

表⑤

		<n=m-5>		
m	n	a	b	c
6	1	35	12	37
7	2	45	28	53
8	3	55	48	73
9	4	65	72	97
10	5	75	100	125
11	6	85	132	157
12	7	95	168	193
13	8	105	208	233
14	9	115	252	277
15	10	125	300	325
16	11	135	352	377
17	12	145	408	433
18	13	155	468	493
19	14	165	532	557
20	15	175	600	625
21	16	185	672	697
22	17	195	748	773
23	18	205	828	853
24	19	215	912	937
25	20	225	1000	1025
26	21	235	1092	1117
27	22	245	1188	1213
28	23	255	1288	1313

表⑥

		<n=m-6>		
m	n	a	b	c
7	1	24	7	25
8	2	30	16	34
9	3	36	27	45
10	4	42	40	58
11	5	48	55	73
12	6	54	72	90
13	7	60	91	109
14	8	66	112	130
15	9	72	135	153
16	10	78	160	178
17	11	84	187	205
18	12	90	216	234
19	13	96	247	265
20	14	102	280	298
21	15	108	315	333
22	16	114	352	370
23	17	120	391	409
24	18	126	432	450
25	19	132	475	493
26	20	138	520	538
27	21	144	567	585
28	22	150	616	634
29	23	156	667	685

表⑦

		<n=m-7>		
m	n	a	b	c
8	1	63	16	65
9	2	77	36	85
10	3	91	60	109
11	4	105	88	137
12	5	119	120	169
13	6	133	156	205
14	7	147	196	245
15	8	161	240	289
16	9	175	288	337
17	10	189	340	389
18	11	203	396	445
19	12	217	456	505
20	13	231	520	569
21	14	245	588	637
22	15	259	660	709
23	16	273	736	785
24	17	287	816	865
25	18	301	900	949
26	19	315	988	1037
27	20	329	1080	1129
28	21	343	1176	1225
29	22	357	1276	1325
30	23	371	1380	1429

ChatGPT を使うために

竹中 芳夫（西三数学サークル）

ChatGPT の導入

- ① Google アカウント作成 ([Google アカウントの作成 - Google アカウント ヘルプ](#))
- ② IntroducingChatGPT (<https://openai.com/blog/chatgpt>)
- ③ 右上にある Sign up ↗ をクリック
- ④ Google アカウントを使ってチャット GPT を登録をする。
- ⑤ **ChatGPT を終了するとき、必ずその画面を「お気に入り」に登録しておくこと。**

注) ①から④までの説明はユーチューブに多く紹介されていますが、⑤が抜けていることがありますので、ご注意ください。

ChatGPT の使い方



- ① **Send a message** : 質問ボックス 改行は **Shft** + **Enter** を押す
- ② 送信は **紙飛行機** または **Enter** をクリックする
- ③ 質問の回答
- ④ **Stop generating** : 回答の途中で文章を止める
Regenerate response : (回答が終わった後で別の回答を求める)
- ⑤ **+New chat** : チャット (コンピュータとの対話)
- ⑥ 昨日のチャット
- ⑦ **Upgrade to Plus** : 有料版へのアカウント
- ⑧ **芳夫** をクリックする
Help&FAQ : チャット GPT についての質問
Clear Conversations : チャットの履歴をすべて消す
Settings をクリックすると **Dark mode** : 背景を黒くする **Light mode** : 背景を白くする
を選ぶことができる。
これまでのチャット履歴をすべて消去 (確認なしで消去されるので注意) する「Clear all chat」がある。
Log out : チャット GPT から退出する

【参考】 【初心者向け】 ChatGPT の基本的な使い方

[ASCII.jp : 【初心者向け】 ChatGPT の基本的な使い方](#)

具 体 例

① 2次方程式の解の公式を求めよ。

2次方程式の一般的な形式は以下のように表されます：

$$ax^2 + bx + c = 0$$

このとき、2次方程式の解を求めるための公式は以下の通りです：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ここで、 \pm は2つの異なる解を表しています。また、 $\sqrt{\quad}$ は平方根を表し、 $b^2 - 4ac$ が負の値を持つ場合は実数解は存在しません。また、この公式は二次方程式の特別な場合である重解(重複解)の場合も適用可能です。

② $8 \div 2(2+2)$ を計算せよ

この数式の計算は、数学の規則に従って行います。数式を順番に計算していきましょう。

まず、括弧内の計算を行います。

$$2 + 2 = 4$$

次に、割り算を行います。

$$8 \div 2 = 4$$

最後に、掛け算を行います。

$$4 \times 4 = 16$$

したがって、 $8 \div 2(2 + 2)$ の答えは16です。

数式の解釈によって結果が異なる場合がありますが、通常の数学の規則に基づいて解釈すると、以下のように計算できます。

$8 \div 2(2+2)$ を計算します。まず、括弧内を計算します。 $2 + 2 = 4$ です。

次に、掛け算を行います。 $2 \times 4 = 8$ です。

最後に、割り算を行います。 $8 \div 8 = 1$ です。

したがって、 $8 \div 2(2+2)$ の結果は 1 となります。

③ $y=x^2$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積を積分記号を使って答えよ。

$y = x^2$ と $y = x$ のグラフによって囲まれた部分の面積を求めるために、積分記号を使用します。

まず、 $x = 0$ と $x = 1$ の間での $y = x^2$ と $y = x$ の交点を求めます。

$x^2 = x$ を解くと、 $x^2 - x = 0$ となります。これを因数分解すると $x(x - 1) = 0$ となります。したがって、 $x = 0$ または $x - 1 = 0$ なので、 $x = 0$ または $x = 1$ です。

次に、求めた交点 $x = 0$ と $x = 1$ を用いて、面積を計算します。

面積を表す積分式は以下のようにになります。

$$S = \int_{[0, 1]} (x - x^2) dx$$

これを計算すると、

$$S = [x^2/2 - x^3/3]_{[0, 1]} = (1^2/2 - 1^3/3) - (0^2/2 - 0^3/3) = (1/2 - 1/3) - (0 - 0) = 1/2 - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6$$

よって、 $y = x^2$ と $y = x$ に囲まれた部分の面積は $1/6$ です。

④ 次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めよ。

$$A=2x^3-12x+9, B=x^2-3x+2$$

整式 A を整式 B で割るためには、長除法を使うことができます。以下に手順を示します。

1. 最初に、A の最高次の項の次数を B の最高次の項の次数で割ります。A の最高次の項は $2x^3$ であり、B の最高次の項は x^2 なので、 $2x^3 \div x^2 = 2x$ となります。これが商の最高次の項となります。

2. 次に、 $2x$ と B を掛けて、その結果を A から引きます。 $2x(x^2-3x+2) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$ となります。これを A から引くと、 $A - (2x^3 - 6x^2 + 4x) = -6x^2 + 4x + 9$ となります。
3. 次に、新しい A である $-6x^2 + 4x + 9$ を B で割ります。新しい A の最高次の項は $-6x^2$ であり、 B の最高次の項は x^2 なので、 $-6x^2 \div x^2 = -6$ となります。これが商の次の項となります。
4. -6 と B を掛けて、その結果を新しい A から引きます。 $-6(x^2-3x+2) = -6x^2 + 18x - 12$ となります。これを新しい A から引くと、 $(-6x^2 + 4x + 9) - (-6x^2 + 18x - 12) = -14x - 3$ となります。
5. 新しい A である $-14x - 3$ を B で割ります。新しい A の最高次の項は $-14x$ であり、 B の最高次の項は x^2 なので、 $-14x \div x^2 = -14x^{-1} = -14/x$ となります。これが商の次の項となります。
6. 商の次の項が定数項になるまで手順を繰り返します。しかし、ここで商の次数は 0 次となり、 B の最高次の項は x^2 なので、これ以上割り算は行えません。

したがって、整式 A を整式 B で割った商は $2x - 6$ 、余りは $-14x - 3$ となります。

⑤ $4x^2 - 9xy + 2y^2$ を因数分解せよ。

ChatGPT

与えられた式 $4x^2 - 9xy + 2y^2$ を因数分解すると、以下のようになります：

$$4x^2 - 9xy + 2y^2 = (2x - y)(2x - 2y)$$

したがって、 $4x^2 - 9xy + 2y^2$ は $(2x - y)(2x - 2y)$ と因数分解されます。

3回やり直しましたが、正解にはたどり着きませんでした。

「ChatGPT を使って数学の質問するにはどうすればよいか」

ChatGPT で数式を使うときは

「Word」 → 「挿入」 → 「数式」

として数式ソフトを使って問題文を作り、それをコピーして ChatGPT に貼り付ければよい。



例

1 $\sum_{n=1}^5 n$ を求めよ

$\sum_{n=1}^5 n$ を求めると、 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ となります。

2 $\int_0^1 x^2 dx$ の値を求めよ。

与えられた積分 $\int_0^1 x^2 dx$ を計算してみましょう。

積分 $\int_0^1 x^2 dx$ は、 x の 2 乗の不定積分を求め、区間 $[0, 1]$ での定積分として解釈することができます。

不定積分 $x^3/3$ に基づいて、区間 $[0, 1]$ での定積分を計算します。

$$\int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = (1^3/3) - (0^3/3) = 1/3$$

したがって、 $\int_0^1 x^2 dx$ の値は $1/3$ です。

3 次の方程式を解け $\log_2 x + \log_2(x - 7) = 3$

次の方程式を解け $[\log]_2 x + [\log]_2 (x-7) = 3$

ChatGPT

与えられた方程式を解くために、まず方程式を変形します。

$$\log_2(x) + \log_2(x - 7) = 3$$

$$\log_2(x(x - 7)) = 3$$

次に、両辺の対数を 2 の底から指数形式に変換します。

$$2^3 = x(x - 7) \quad 8 = x^2 - 7x \quad x^2 - 7x - 8 = 0$$

この 2 次方程式を解くために、因数分解、公式、または数値解法を使用することができます。ここでは公式を使用して解を求めます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この場合、 $a = 1$ 、 $b = -7$ 、 $c = -8$ です。

$$x = (7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-8)}) / (2(1))$$

$$x = (7 \pm \sqrt{49 + 32}) / 2$$

$$x = (7 \pm \sqrt{81}) / 2$$

$$x = (7 \pm 9) / 2$$

したがって、解は次のようになります。

$$x = (7 + 9) / 2 = 16 / 2 = 8 \quad \text{または} \quad x = (7 - 9) / 2 = -2 / 2 = -1$$

よって、方程式の解は $x = 8$ または $x = -1$ です。