先日、「津田塾の数学を楽しむ会」でＹさんが「共通テスト数学Ⅰ数学Aの第3問」の一般化をレポートをされました。問題を解くだけではなく発展させて考えていくのは黒田先生の教えてくださった方法のひとつです。面白かったので私もこの問題を発展させて考えてみようと思いました。その過程で重複順列と完全順列の漸化式が似ていることに気付いたので、それを皆さんにも一緒に見てもらいたいと思いレポートに入れました。
内容は次の通りです。

【0】数学Ⅰ数学Aの第3問　問題

問題元本は最後に添付してあります。４ページもあるので簡単にここに示しておきます。

第3問　箱の中にカードが２枚以上入っており、それぞれのカードにはアルファベットが１文字だけ書かれている。この箱の中からカードを１枚取り出し、書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。

n 枚の試行で A,B がそろうとは A,B のそれぞれが少なくとも１回は取り出されることを意味します。
n 枚の試行で 初めてA,B がそろうとは A,B のそれぞれが少なくとも１回は取り出され、
かつそのうちの１枚がn 回目の試行で初めて取り出されることを意味します。

(1)２枚で試行で A,B がそろう確率　２回、３回、４回の場合を考えます。
(2)３枚で試行で 初めてA,B,C がそろう確率　３回、４回、５回の場合を考えます。
(3)４枚の試行で 初めてA,B,C,D がそろう確率　６回の場合を(1)(2) を使って求めます。

太郎さんと花子さんは、６回目の試行で初めて A,B,C,D がそろう確率について考えている。
太郎：例えば、５回目までに A,B,C のそれぞれが少なくとも１回は取り出され、かつ６回目に初めて D が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。
花子：それなら、初めて A,B,C だけがそろうのが、３回目のとき、４回目のとき、５回目のときで分けて考えてみてはどうかな。

という会話文があって４枚の試行で、６回目の試行で初めて A,B,C,D がそろう確率を求めます。

私が初めてこの問題を見たとき「これは重複順列(空室なし）と最後に優勝が決まる確率のあわせ技だな」と思いました。
すなわち　３文字を５個並べる重複順列(空室なし)　$3^5-{}_3C_2(2^5-2)-{}_3C_1$ を使って

$$P=\frac{\{3^5-{}_3C_2(2^5-2)-{}_3C_1\}\times 4}{4^6}=\frac{150\times 4}{4^6}=\frac{75}{512}$$

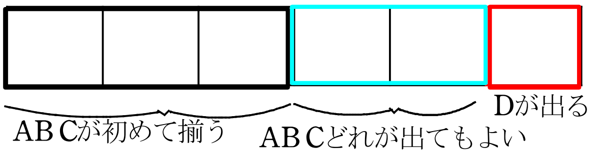
とすれば求められると思いました。

さて、共通テストは作問者の考えに沿って、前に求めた解を使って次々と求めていくことを求められます。たとえ最後の答えが分かってもその途中を求めなければなりません。しかも時間内に間違わずに求めなければなりません。
この問題も重複順列を使えばすぐに解けますが、問題に沿っていくのはかなり複雑で道に迷ってしまいそうです。
(共通テストの演習のとき $\boxed{}$ に答えの値を書き込んでおくことを教えます。これがコツなんですよ！)
これって数学の力を測るテストなのでしょうか。
今回は作問者の考えの通り解き、次に重複順列を使って解いて、それに含まれている意味を考え、それを発展させてみようと思います。

【1】共通テストの問題に沿った解答

問題に沿って最後にDが出る場合を3つの場合に分けて求めていきます。

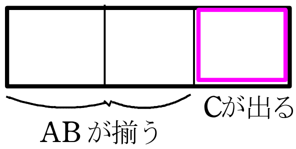
① ３回目の試行で初めてABCが揃い
６回目にDが出る場合



$6 \times 3^2 \times 1 = 54$

54通り　$\boxed{ク}$

２回目の試行でABが揃い
３回目にCが出る場合



２回目の試行でABが揃うのは$\begin{cases} AB \\ BA \end{cases}$の２通り　(1)(ⅰ)

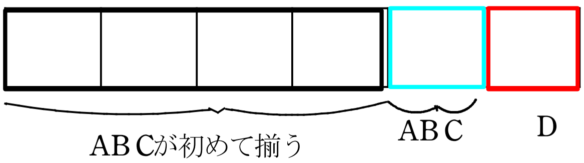
３回目の試行で初めてCが出てABCが揃うのは

$2 \times 1 = 2$　２通り

３回目の試行で初めてABCが揃うのは

$2 \times 3 = 6$　6通り　(2)(ⅰ)

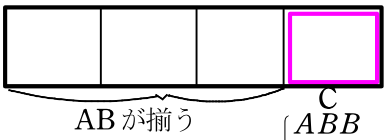
② ４回目の試行で初めてABCが揃い
６回目にDがでる場合



$18 \times 3 \times 1 = 54$

54通り

3回目の試行でABが揃い
4回目にCが出る場合



３回目の試行でABが揃うのは$\begin{cases} ABB \\ BAB \\ BBA \end{cases}$、$\begin{cases} AAB \\ ABA \\ BBA \end{cases}$

6通り

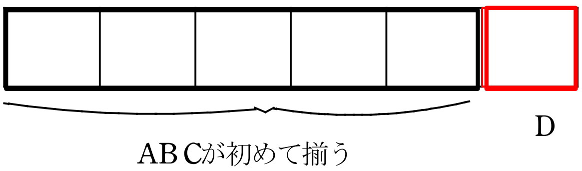
４回目の試行で初めてCが出てABCが揃うのは

$6 \times 1 = 6$　6通り

４回目の試行で初めてABCが揃うのは

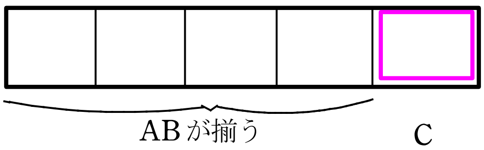
$6 \times 3 = 18$　18通り

③ ５回目の試行で初めてABCが揃い
６回目に初めてDが揃う場合



$42 \times 1 = 42$　42通り

４回目の試行でABが揃い
５回目に初めてCが揃う場合



４回目の試行でABが揃うのは、

$\begin{cases} AAAB \\ AABA \\ ABAA \\ BAAA \end{cases}$ $\begin{cases} AABB \\ ABAB \\ ABBA \\ BAAB \\ BABA \\ BBAA \end{cases}$ $\begin{cases} ABBB \\ BABB \\ BBAB \\ BBBA \end{cases}$の14通り

５回目の試行で初めてCが出てABCが揃うのは

$14 \times 1 = 14$　14通り

５回目の試行で初めてABCが揃うのは

$14 \times 3 = 42$　42通り

①②③より

$$P = \frac{(54+54+42) \times 4}{4^6} = \frac{150 \times 4}{4^6} = \frac{75}{512}$$

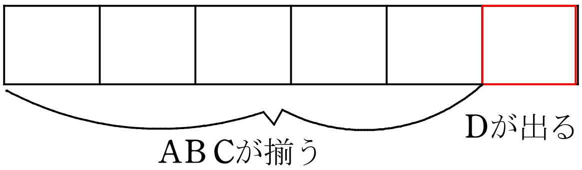
すべてを書き出さなくても重複順列で求められます。

３回目の試行でABが揃うのは　${}_3C_1 + {}_3C_2 = 6 = 2^3 - 2$

４回目の試行でABが揃うのは、${}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 = 14 = 2^4 - 2$

【2】重複順列での解答

「重複順列」を用いて解いてみます。



最後にDが出てABCDが揃うのは

5回までにAB Cが揃い最後にDが出ればよい。

$3^5-{}_3C_2(2^5-2)-{}_3C_1=243-90-3=150$　$150\times 1=150$

最後に出るのがABCDの4通りの場合があるからその確率Pは

$$P=\frac{150\times 4}{4^6}=\frac{75}{512}$$

【1】の解をΣを使って表すと

$$P=\frac{\{(2^2-2)\cdot 3\cdot 3^2+(2^3-2)\cdot 3\cdot 3+(2^4-2)\cdot 3\cdot 1\}\times 4}{4^6}=\sum_{k=0}^{2}\frac{(2^{4-k}-2)\cdot 3^{k+1}}{4^5}=\sum_{k=1}^{3}\frac{(2^{5-k}-2)\cdot 3^k}{4^5}$$

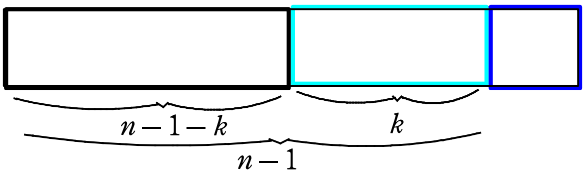
n まで拡張してみると $P=\sum_{k=0}^{n-4}\frac{(2^{n-1-k}-2)\cdot 3^{k+1}}{4^{n-1}}=\sum_{k=1}^{n-3}\frac{(2^{n-1-k}-2)\cdot 3^k}{4^{n-1}}$ … ①

4種類のカードが n 回目で初めて揃う確率 P は重複順列を使うと

$P=\frac{(3^{n-1}-{}_3C_2(2^{n-1}-2)-{}_3C_1)\times 4}{4^n}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}$ … ②

これは包除原理の式になっています

①が②同じになるかどうかを を確かめてみましょう。



①②は同じで $n=6$を代入するといずれも $\frac{3^5-3\cdot 2^5+3}{4^5}=\frac{75}{512}$ となります。

【3】問題の一般化漸化式と表を使った求め方＊ K さん(津田塾数学を楽しむ会) のレポートを参考にしました。

この後 m を増やしていくのが困難なわけですが、それを考えていきます。

m 種類のカードが n 回目で初めて揃う取り出し方 $a_m(n)$
m 種類のカードが n 回目までに揃う取り出し方 $b_m(n)$　とおく

$m=1$ のとき $\begin{cases} a_1(1)=1, a_1(n)=0 \\ b_1(n)=1 \end{cases}$

$n \geqq m \geqq 2$ のとき

(1) $n-1$ 回目までに $m-1$ 個が揃い

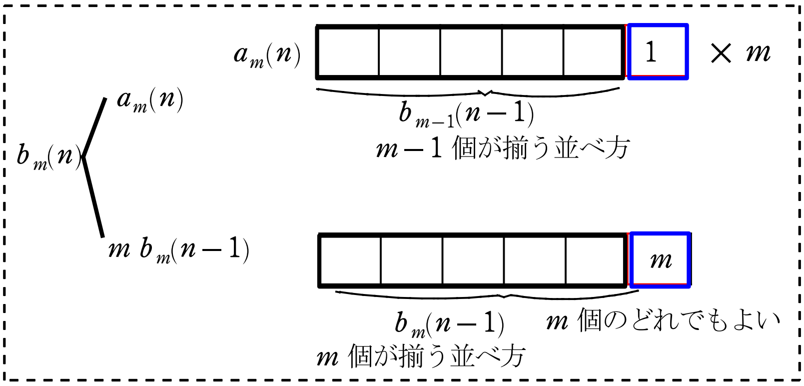
n 回目に残りの一つが出る場合は

$m\, b_m(n-1)$

(2) $n-1$ 回目までに m 個全部がそろいが揃い

n 回目にどれが出てもよい場合は

$m\, b_{m-1}(n-1)$



よって $b_m(n) = a_m(n) + m\, b_m(n-1)$

$a_m(n) = m\, b_{m-1}(n-1)$

$b_m(n) = a_m(n) + m\, b_m(n-1)$

$= m\, b_{m-1}(n-1) + m\, b_m(n-1)$

$= m\,(b_{m-1}(n-1) + b_m(n-1))$

連立漸化式を解くと

$b_1(n)=1$

$n \geqq m \geqq 2$ のとき

$b_m(n) = m\,(b_{m-1}(n-1) + b_m(n-1))$

$a_1(1)=1, a_1(n)=0$

$a_m(n) = m\, b_{m-1}(n-1)$

表による求め方

$b_m(n)$

n \ m	1種類(A)	2種類(AB)	3種類(ABC)	4種類(ABCD)	5種類(ABCDE)
1回	1	0	0	0	0
2回	1	$2!=2$	0	0	0
3回	1	$2^3-2=6$	$3!=6$	0	0
4回	1	$2^4-2=14$	$3(6+6)=36$	$4!=24$	0
5回	1	$2^5-2=30$	$3(14+36)=150$	$4(36+24)=240$	$5!=120$
6回	1	$2^6-2=62$	$3(30+150)=540$	$4(150+240)=1560$	
7回	1	$2^7-2=126$	$3(14+36)=150$	$b_m(n)=m\,(b_m(n-1)+b_{m-1}(n-1)$	

$a_m(n)$

n \ m	1種類(A)	2種類(AB)	3種類(ABC)	4種類(ABCD)	5種類(ABCDE)
1回	1	0	0	0	0
2 回	0	2	0	0	0
3 回	0	2	$2\times3=6$	0	0
4 回	0	2	$6\times3=18$	$4\times6=24$	0
5 回	0	2	$14\times3=42$	$4\times36=144$	
6 回	0	2	$30\times3=90$	$4\times150=600$	
7 回	0	2	$62\times3=186$	$a_m(n)=b_{m-1}(n-1)\times m$	

【0】 完全順列と重複順列の説明

完全順列　1,2,⋯, n の数が書かれた n 枚のカードを一列に並べるとき，k 番目 $(1 \leqq k \leqq n)$ が k でない並べ方を完全順列という.

n 枚のカードの完全順列の個数を $f(n)$ とする。

$f(2)=1$　　$f(3)=2$　　$f(4)=9$　　　　$f(5)=$ $\boxed{}$

12
~~12~~
21

123
~~123~~
~~132~~
~~213~~
231
312
~~321~~

1234	1234	1234	1234
~~1234~~	~~2134~~	~~3124~~	4123
~~1243~~	2143	3142	~~4132~~
~~1324~~	~~2314~~	~~3214~~	4213
~~1342~~	2341	~~3241~~	~~4231~~
~~1423~~	2413	3412	4312
~~1432~~	~~2431~~	3421	4321

12345	12345	12345	12345	12345
12345	21345	31245	41235	51234
12354	21354	31254	41253	51243
12435	21435	31425	41325	51324
12453	21453	31452	41352	51342
12534	21534	31524	41523	51423
12543	21543	31542	41532	51432
13245	23145	32145	42135	52134
13254	23154	32154	42153	52143
13425	23415	32415	42315	52314
13452	23451	32451	42351	52341
13524	23514	32514	42513	52413
13542	23541	32541	42531	52431
14235	24135	34125	43125	53124
14253	24153	34152	43152	53142
14325	24315	34215	43215	53214
14352	24351	34251	43251	53241
14523	24513	34512	43512	53412
14532	24521	34521	43521	53421
15234	25134	35124	45123	54123
15243	25143	35142	45132	54132
15324	25314	35214	45213	54213
15342	25341	35241	45231	54231
15423	25413	35412	45312	54312
15432	25431	35421	45321	54321

$f(5)$ を求めるのに $5!=120$(個)を
書き出して消していくのは大変です。
$f(4)=9$ を使って求め方を考えましょう。
全部の並べ方は$4!=24$
すなわち24個あります。

① 1つだけ同じ数字が並ぶのは
それぞれ3個の完全順列になるから
$f(3)=2$ すなわち2個ずつある。
1の下に1が並ぶ場合が2個
同様に2、3、4場合があり
${}_4C_3\, f(3)=4\times2=8$ $\boxed{8}$個あります。

② 2つ同じ数字が並ぶのは
${}_4C_2=6$ すなわち6種類あり
それぞれが 2個の完全順列になるから
$f(2)=1$
${}_4C_2\, f(2)=6\times1=6$ $\boxed{6}$個あります。

③3つだけ同じ数字が並ぶと
もう一つも同じになってしまうので
$f(1)=0$

④すべて一致してしまう場合が
$\boxed{1}$個あります。

＊0個の完全順列 を$f(0)$ と表し
$f(0)=1$ とします。(下の式を作るために形式上このように決めておきます)
したがって
$f(4)=4!-{}_4C_3\, f(3)-{}_4C_2\, f(2)-{}_4C_1\, f(1)-{}_4C_0\, f(0)$
$=24-8-6-1=9$　よって　$f(4)=9$

1234
$\boxed{1234}$
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
2431
3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

問　$f(5)$を求めよ。
①上の表を利用しての完全順列以外を消して数えよう。
②左の方法で求めよう。

＊ $f(4)=4!-{}_4C_3\, f(3)-{}_4C_2\, f(2)-{}_4C_1\, f(1)-{}_4C_0\, f(0)$　$f(0)=1$ とする

重複順列　　m 種類のものから重複を許して n 個選んで並べる方法を重複順列という

m種類から n個選んで並べる重複順列のうち**全種類を含む場合の数を** $g_n(m)$ とする。($n \geqq m$)

例　1 ～ mの整数から４個選んで並べる重複順列のうち全数字を含む場合の数を $g_4(m)$ とする。

$g_4(1)=1$

1　1　1　1

$g_4(2)=14$

1112　1122　1222
1121　1212　2122
1211　1221　2212
2111　2112　2221
2121
2211

$g_4(3)=36$

1123	2113	1223	2123	1233	3123
1132	2131	1232	2132	1323	3132
1213	2311	1322	2213	1332	3213
1231	3112	3122	2231	2133	3231
1312	3121	3212	2312	2313	3312
1321	3211	3221	2321	2331	3321

$g_4(1)=1^4=1$　　$g_4(2)=2^4-2=14$　　$g_4(3)=3^4-{}_3C_2(2^4-2)-{}_3C_1\cdot 1=36$

全体(3個or2個or1個が並ぶ場合)から
2個だけで並ぶ場合の数 ${}_3C_2\ f_2(4)$ と
1個だけで並ぶ場合の数 $f_1(4)$ を引いて
3個すべてを含む場合の数を求める。

(3)　=(3，2，1)−(2)−(1)

問　$g_4(4)$ を求めよ。

次の問題は同じ種類の問題です。
①異なる3個の数字1 2 3を重複を許して４個並べるは方法は何通りあるでしょう。
②異なる4個の球abcdを3人ABC に分ける方法は何通りあるでしょう。(貰わない人があってもよいものとします)

①$3\times3\times3\times3=3^4=81$　81通り
これは簡単ですが、
②$4\times4\times4=64$　64通り
これは間違っています。
②のときは一つずつの球に聞いてみると分かりやすいです。
球 a さん、あなたは ABC さんのうちのだれに貰われたいですかと聞きます。
そうすると $3\times3\times3\times3=3^4=81$　81通りとなります。
①②は内容は同じ問題です。

【１】包除原理を使う方法

$$f(4) = 4! - {}_4C_3\, f(3) - {}_4C_2\, f(2) - {}_4C_1\, f(1) - {}_4C_0\, f(0)$$

4個のすべての並べ替え

4個から3個を選び、3個で完全順列を作る

4個から2個を選び　2個で完全順列を作る

4個から3個選び　1個で完全順列を作る

4 個とも同じ数とする

$= 24 - 8 - 6 - 0 - 1 = 9$

これは重複順列と似ている。

4種類の数を n 個並べる重複順列（全種類が揃う場合）の数を $g_n(m)$ とすると

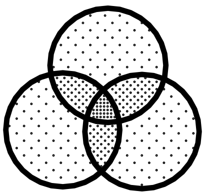
$g_4(1) = 1^4 = 1$　$g_4(2) = 2^4 - 2 = 14$　$g_4(3) = 3^4 - {}_3C_2(2^4-2) - {}_3C_1 \cdot 1 = 36$

$$g_4(4) = 4^4 - {}_4C_3\ g_4(3) - {}_4C_2\ g_4(2) - {}_4C_1\ g_4(1)$$

$= 4^4 - {}_4C_3\ \{3^4 - {}_3C_2(2^4-2) - {}_3C_1\} - {}_4C_2(2^4-2) - {}_4C_1 \cdot 1$

$= 256 - 144 - 84 - 4 = 24$　(4人を4部屋に入れるので $4! = 24$ となり一致する)

この2つの式はとても良く似ているのですが、なぜでしょうか。 $g_3(n)$ で考えてみます。

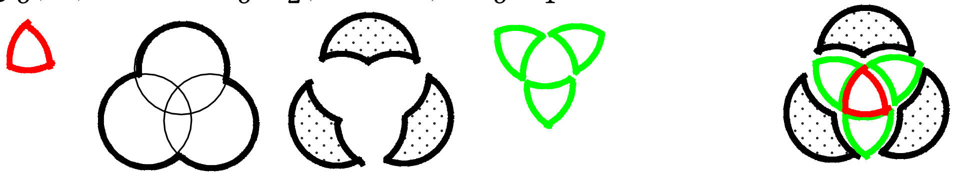


1つだけが出る　…A だけ B だけ C だけが出る場合

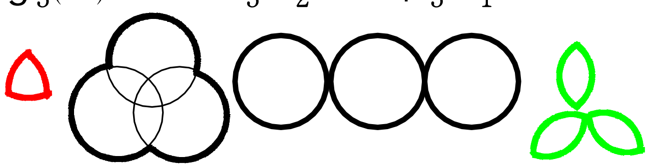
2つだけが出る　…$A\ B$ だけ $B\ C$ だけ $C\ A$ だけが出る場合

3つともが出る　…$A\ \ B\ \ C$ がすべて出る場合すなわち ABC がそろう場合

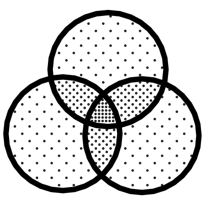
$$g_3(n) = 3^n - {}_3C_2(2^n - 2) - {}_3C_1$$



$$g_3(n) = 3^n - {}_3C_2 \cdot 2^n + {}_3C_1$$



同様に完全順列も考えられます



1つだけが異なる　…A だけ B だけ C だけが異なる場合

2つだけが異なる　…$A\ B$ だけ $B\ C$ だけ $C\ A$ だけが異なる場合

3つとも異なる　…$A\ \ B\ \ C$ がすべて異なる場合すなわち完全順列となる場合

【２】$f(n)$ の漸化式

$k\,(1 \leqq k \leqq n)$ が ⓝ の下にあるとする。

(1) ⓚ の下に n があるとき

k は n を除く $n-1$ 通りの選び方があり

n と k を除く $n-2$ の完全順列は $f(n-2)$ 通りあるから

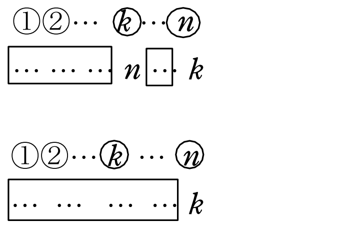
$(n-1)\,f(n-2)$ 通りある。

(2) ⓚ の下に n がないとき

k は n を除く $n-1$ 通りの選び方があり

k を除く $n-1$ の完全順列は $f(n-1)$ とおりある。

$(n-1)\,f(n-1)$ 通りある。



＊ k の下に は n 以外の数が入る

よって
$$\begin{cases} f(1)=0 \quad f(2)=1 \\ \boxed{f(n)=(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}} \quad (n \geqq 3) \end{cases}$$

$n=9$ を代入すると $f(4)=(4-1)\{f(4-1)+f(4-2)\}=3(2+1)=9$ でとなり、うまくいっている。

【３】 $g_n(m)$ の漸化式

m 種類のカードが n 回目までに揃う取り出し方 $g_n(m)$ とする。

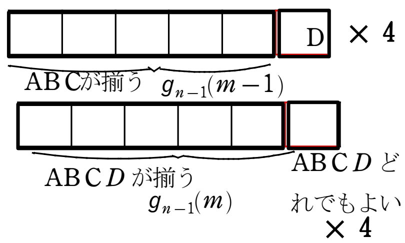
$n \geqq m \geqq 2$ のとき

(1) $n-1$ 回目までに $m-1$ 個が揃い

n 回目に残りの一つが出る場合は　　$m\,g_n(m-1)$

(2) $n-1$ 回目までに m 個全部がそろいが揃い

n 回目にどれが出てもよい場合は　　$m\,g_{n-1}(m-1)$



(1)(2)より

$g_n(m)=m\,g_{n-1}(m)+m\,g_{n-1}(m-1)=m\{g_{n-1}(m)+g_{n-1}(m-1)\}$

よって
$$\begin{cases} g_1(1)=1 \quad g_n(1)=0\ (n \fallingdotseq 1) \\ \boxed{g_n(m)=m\{g_{n-1}(m)+g_{n-1}(m-1)\}} \quad (n \geqq m \geqq 2) \end{cases}$$

＊n に $n+1$ を代入した式と一致する。 $f(n+1)=(n)\{f(n)+f(n-1)\}$

$f(n)$ では　列の最後の $\begin{smallmatrix} ⓝ \\ k \end{smallmatrix}$ が決まってしまうので $g_n(m)$ と 1 だけズレてしまいますが同じ漸化式になっています。初期条件が違うので $f(n)$ では $n!$ 、$g_n(m)$ では m^n がもとになってい次回は包除原理とのかかわりをまとめたいと思います。

参考文献

村井　靖雄　著

「組み分けの総数の種々の公式と $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k k!$ の組合せ論的な意味について

「感想」

・完全順列と重複順列の話は、「数学を楽しむ会」でもレポートしてもらっています。共通テストの問題がややこしくて、表にまとめたほうがわかりやすいと思って発表したら、それを見て漸化式が似ていることに気がつかれたということで、さすが、と思いました。高校数学に触れていない私は、「完全順列」という言葉も知らず、プレゼントの交換の問題と同じ、と言われて「ああ、なるほど」と思いました。（矢野）

・鈴木先生のお話も共通テストの内容を更に深く考えることができて面白かったです。（松本）

・弓子さんの話では共通テストの問題の「面白さ」と「面倒くささ」を改めて思いました。こういう出題のスタイルでは内容的に面白くても、最後まで行かないと先が見えてこない、という不安が生まれる気がします。こんな方法でも考えることができるというような「到達目標」に向かっていろいろな方法を考える出題形式にならないでしょうか。（広田）