「“ピタゴラス数の公式”の図的証明」

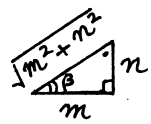
長野・和田　博

前回 Zoom 例会での報告「“ピタゴラス数の公式”の、変数を m , $(m-n)$ とする使い方」に続き、“ピタゴラス数の公式”「直角三角形の辺の比＝ $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$」の図的証明について説明する。

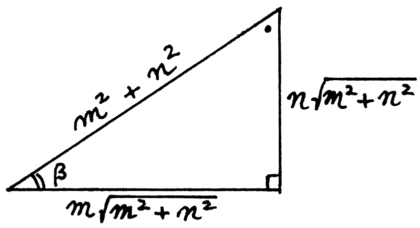
前回、広田さんから「全てのピタゴラス数について成り立つことの証明」に関して質問があった。図的でない証明はウィキペディア等に載っているが、高校生に説明しても納得が得られるようなものではない。そこで、高校生にも分かるような図的証明を試みたい。（図は、例会の中で提示します。）

1.「直角三角形の辺の比 ＝ $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$」の図的意味

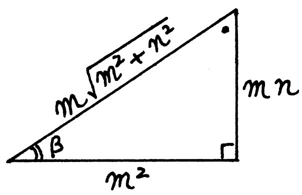
①.「$m:n:\sqrt{m^2+n^2}$ の直角三角形」を生成元として考える（$tan\beta=n/m$ =有理数）.



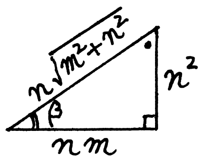
②.「①の直角三角形を $\sqrt{m^2+n^2}$ 倍した $m\sqrt{m^2+n^2}:n\sqrt{m^2+n^2}:m^2+n^2$ の直角三角形」



③.「①の直角三角形を m 倍した $m^2:mn:m\sqrt{m^2+n^2}$ の直角三角形」



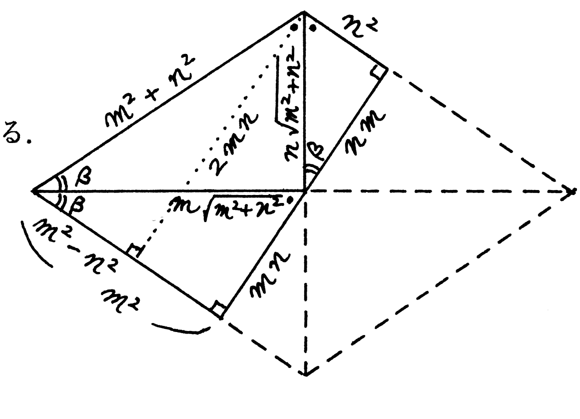
④.「①の直角三角形を n 倍した $nm:n^2:n\sqrt{m^2+n^2}$ の直角三角形」



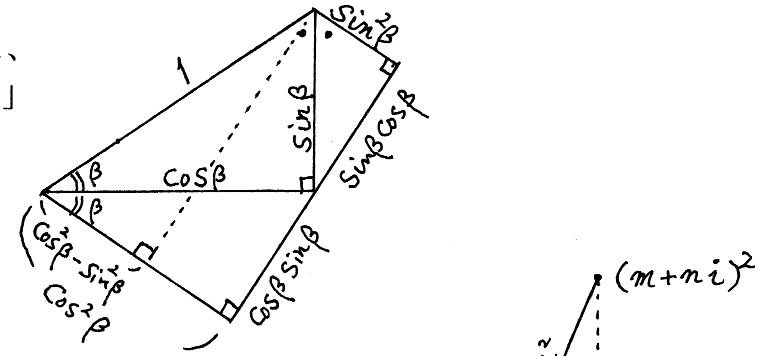
⑤.「②，③，④ の直角三角形をつないだ図にできる $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$ の直角三角形」

また、

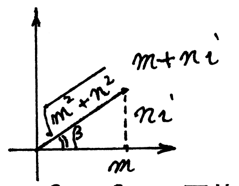
「2β を鋭角の内角とする菱形の 1/2 の図」である.

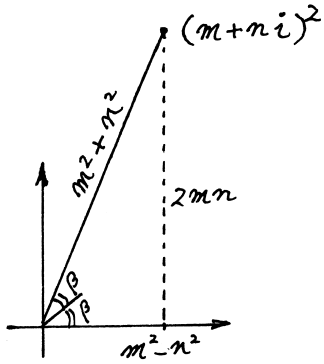


⑥. 「⑤の図を $1/(m^2+n^2)$ 倍すると、
sin , cos の倍角公式の図となる」



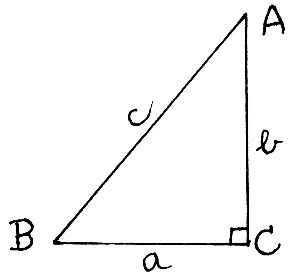
⑦. 複素数 $m+ni$ の 2 乗
「$(m+ni)^2=m^2-n^2+2mni$」の図.



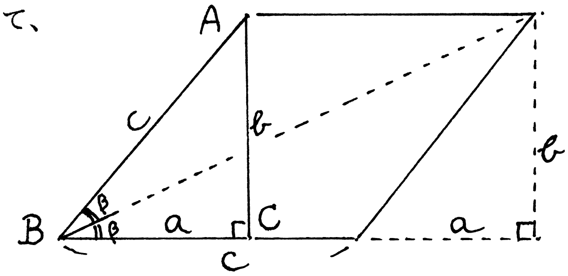


2.「直角三角形の辺の比 ＝ $m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$」の図的証明

①.「“ピタゴラス三角形”の直角をはさむ~~角~~辺を a , b 、斜辺を c とするとき、
$a:b:c=m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$
または
$b:a:c=m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$.
ただし、m , n は $m>n$ の自然数 .」
を証明する。



②.「$\angle B=2\beta$ を鋭角の内角とする」菱形において、
$tan\beta=b/(c+a)$ =有理数 .
∴ $tan\beta=n/m$ とおくことができて
$a:b:c=m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$.
が成り立つ.



③.「$\angle A=2\alpha$ を鋭角の内角とする」菱形において、
$tan\alpha=a/(c+b)$ =有理数 .
∴ $tan\alpha=n/m$ とおくことができて
$b:a:c=m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$.
が成り立つ.