# 『放物線の頂点は、限りなく円に近い』

長野　和田　博

## 0. はじめに

長野全県サークル 1/27 での「放物線の頂点は、限りなく円に近い」という私の発言は、参加者の皆さんにとって意外であったようです。「中学，高校それぞれでどう扱うことができるか？」が課題となりました。ここでも、その課題を検討してみたいと思います。草薙浩二さん岡崎和弘さんからも、放物線の頂点の近傍を調べた資料をそれぞれメールで頂いています。

「かつての凹面鏡は、放物面の近似として球面であった」ことは周知の事実であり、反射望遠鏡に詳しい者にとっては「放物線の頂点は、限りなく円に近い」というイメージが定着しています。私の場合も、小学校 6 年の時に天体望遠鏡を作るためそのことを学びました。ガラス板を研磨して凹面鏡を作る場合、球面になってしまうので球面収差が生じます。

また逆に、「直径 1 の円の微小な弧は、放物線 $y = x^2$ の頂点の近傍に近い」ため、「半径の 1/2 の点が近似的な焦点となる」わけです。つまり、丸い物であるならば半径の 1/2 辺りに光や音などを集めることができます。高校 1 年の時、傘の内側に銀紙を貼って太陽炉を作りましたが、20 分位で湯を沸かすことができました。布が入ったステンレスのボールを窓辺に置いたら火災になった、という収斂火災の例もあります。10 年位前になりますが、「サイエンスナビゲーター」を自称する桜井進氏の作った NHK の 3 分くらいのシリーズテレビ番組の中で、「福寿草の花ビラは放物線の形をしており、メシベに辺りに焦点があるので虫が温まりに来る」と説明していました。「放物線の形をしている」というのは、言い過ぎです。他にもおかしな話が多く、黒田俊郎さんが NHK に抗議を申し入れています。「思い込みによる言い過ぎ」には、気を付けなければなりません。

**金属ボウル 太陽光集め 中の布発火**

岡谷市で七月に発生した住宅火災の原因を調べていた岡谷署は三十日までに、屋外の窓際に置いてあったステンレス製のボウルが太陽の光を集め、中にあった古いタオルから自然発火したと断定した。同日、署の裏庭で当時の状況を実験で再現したところ、木製の台上のボウルからは数秒で煙が上がり、約三十分後に炎が出た。

ボウル内で太陽の反射光が焦点を結ぶと、古いタオルはくすぶり始め、約30分後には炎を上げた＝岡谷署内での燃焼実験

**岡谷の住宅火災 再現実験で断定**

同署の調べだと、火災は七月十日午前八時半ごろ、岡谷市塚間町一、会社員（五四）方で発生した。火は、屋外の窓際に置いてあった机の上のボウル内から出たとみられ、木製の雨戸の表面をなめ上がって屋根のひさしのすき間から二階に延焼、木造二階建て住宅の二階部分約三十五平方㍍を焼いた。

ボウルは藍（あい）染め用で光沢が強く、直径三十三㌢、深さ一二・五㌢。古いタオルのほか、軍手、なた、金づちが入っていた。

同署は同じ形のボウルに古いタオルなどを入れ、当時を再現して実験。この日は出火当日と同様、晴れて日差しが強く、ボウル内の曲面に差し込んだ太陽光の反射光がタオルの上に焦点を結ぶと、十秒以内に煙を出し始めた。実験は二回行い、ともにほぼ同じ結果を得た。

ボウル、金魚鉢、水晶玉、ペットボトルなど鏡状のものによる火災は「収斂（れん）火災」と呼ばれる。財団法人日本防火研究普及協会の「平成九年火災年報」によると、九七年の全国の火災六万一千件のうち、自然発火は八百七十八件で、うちレンズによるものは二十五件。東京消防庁によると、都内で数年前、ボウルに入れた洗濯物から出火した例があるという。

同署は「太陽光を集めるものに用心を」と注意を呼びかけている。

1999年（平成11年）8月31日（火曜日）

## 1．「放物線の頂点に接する円」を調べる

放物線およびその頂点に接する円

$y = x^2$ ,　　　　　　　　　　　… ①

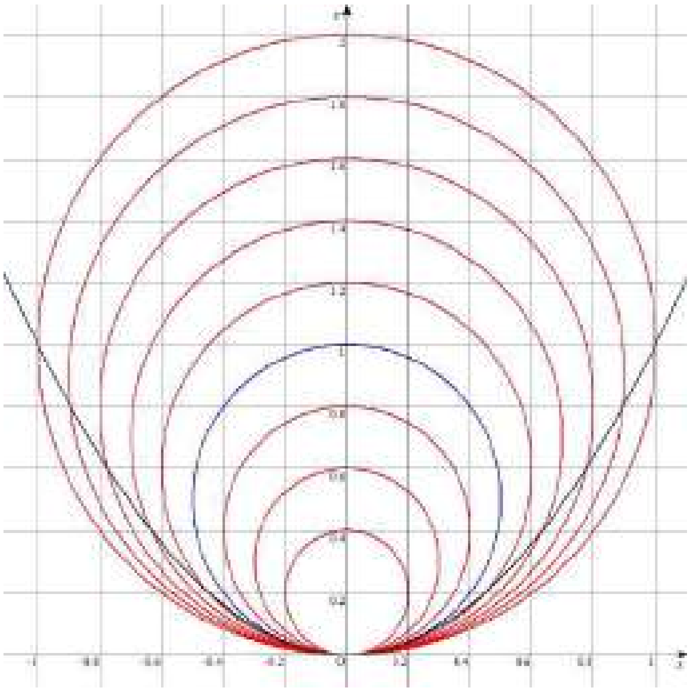
$x^2 + (y - r)^2 = r^2$ .　　　　　　… ②

を、半径 $r$ を変化させて描くと、
右図のように

$2r \leq 1$ のとき放物線は頂点で円に外接する.

$2r > 1$ のとき放物線は頂点で円に内接して
さらに２点で交わる.

こととなります。



連立方程式①②を解いて①②の共有点を求めてみましょう。①を②に代入した

$y + (y - r)^2 = r^2$ .

により

$y\{y - (2r - 1)\} = 0$ .

∴　$y = 0$ ,　$2r - 1$ .

となり、$x$ は①による次式に代入します。

$x = \pm\sqrt{y}$ .

∴ 共有点は、

$(x\ ,\ y) = (0\ ,\ 0)$ …重解で接点 ,

$(\pm\sqrt{2r-1}\ ,\ 2r - 1)$ …　$2r > 1$ のとき、$x$ は異なる二つの実数解で二つの交点 ,

$2r = 1$ のとき、$x$ は重解で接点$(0\ ,\ 0)$ ,

$2r < 1$ のとき、$x$ は異なる二つの虚数解で共有点はない .

となります。したがって、「直径 $2r = 1$ の円のとき、四重解による接点$(0\ ,\ 0)$」となり、
この円の半径は「放物線 $y = x^2$ の、頂点における曲率半径 $r = 1/2$」を表しています。
曲線 $y$ の曲率半径を求める公式（証明は、[注４]を参照）

$r = \{1 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}/y''$ .　　　　　…③

によっても、「$x = 0$ のとき、$y' = 2x = 0$ ,　$y'' = 2$」であるから次が求まります。

$r = \{1 + (0)^2\}^{\frac{3}{2}}/2 = 1/2$ .

また、円②の下側半分をテーラー展開すると

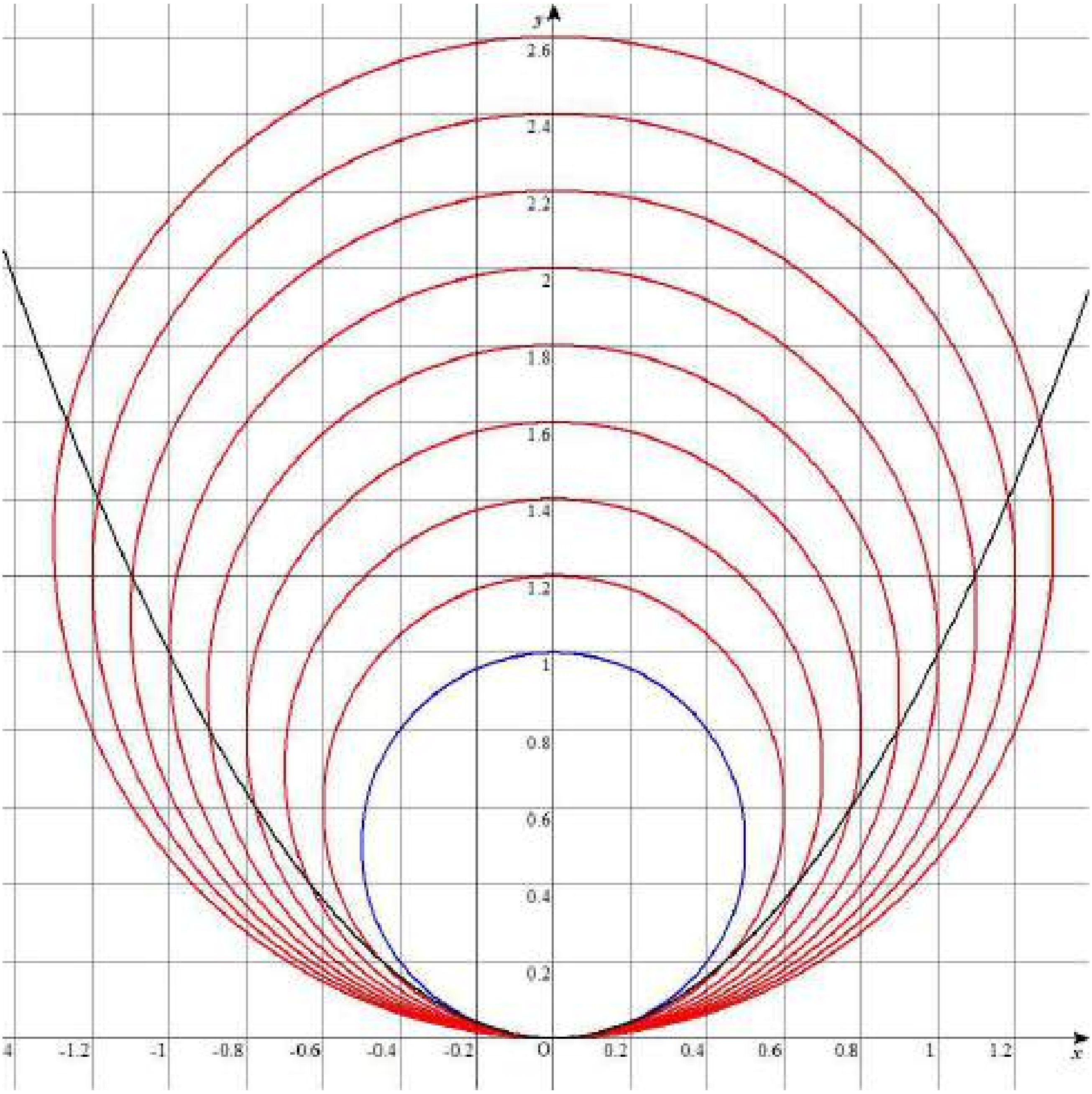
$y = \mathrm{r} - \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \cdots$ .

となり、「$r = 1/2$ のときの $x = 0$ の近傍」では

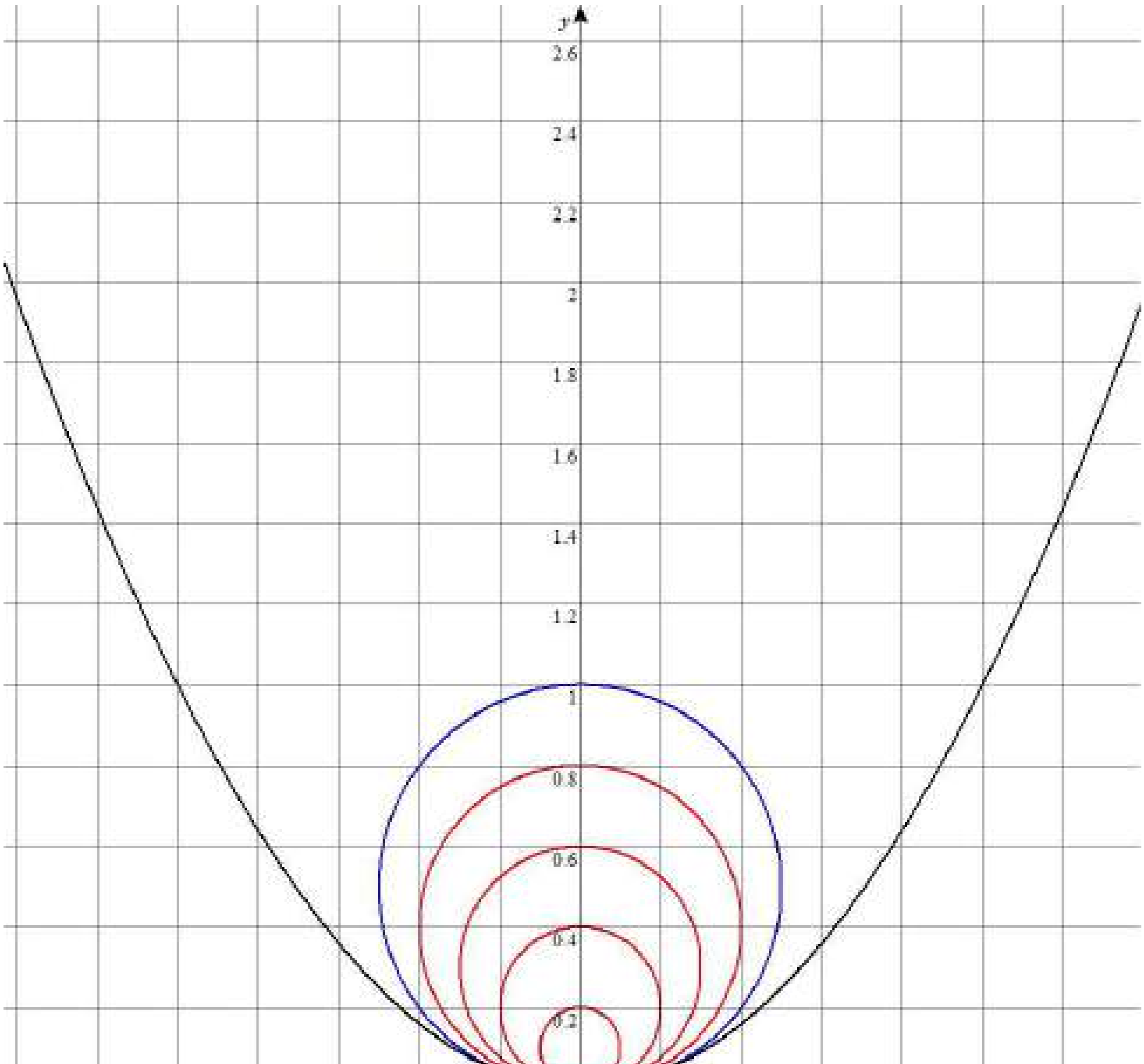
$y = x^2 + x^4 + \cdots \cong x^2$ .

となり、放物線 $y = x^2$ に限りなく近くなります。

［注１］ $2r \geq 1$ の図



[注 2] $2r \leq 1$ の図



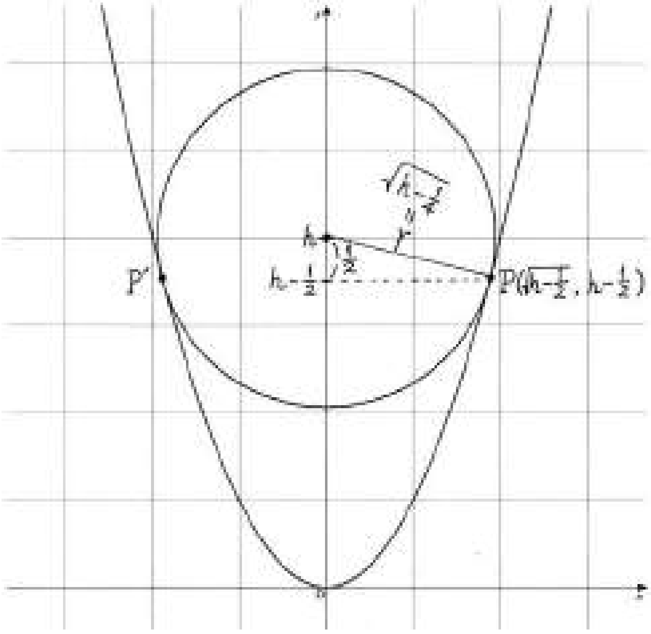
## 2.「放物線に２点で接する円」を調べる

放物線および、それに２点で接する中心 $(0,h)$ の円

$y = x^2$ .　　　　　　　　　　… ①

$x^2 + (y-h)^2 = r^2$ .　　　　　　… ②

について調べてみましょう。




まず、連立方程式①②を解いて①②の接点を求めます。①を②に代入した

$y + (y-h)^2 = r^2$ .

$y^2 + (1-2h)y + h^2 - r^2 = 0$ .

が重解になる条件

$D = (1-2h)^2 - 4 \times 1 \times (h^2 - r^2) = 0$ .

より

$r = \sqrt{h - \frac{1}{4}}$ .　　　　　　… ③

$y = -\frac{(1-2h)}{2\times 1} = h - \frac{1}{2}$ .　　　　… ④

となり、接点は次式で表されます。

$(x\ ,\ y) = (\pm\sqrt{h-\frac{1}{2}}\ ,\ h-\frac{1}{2})$　…　$h > \frac{1}{2}$ のとき、$x$ は異なる二つの実数解で２つの接点，

$h = \frac{1}{2}$ のとき、$x$ は重解で接点(0 , 0）.

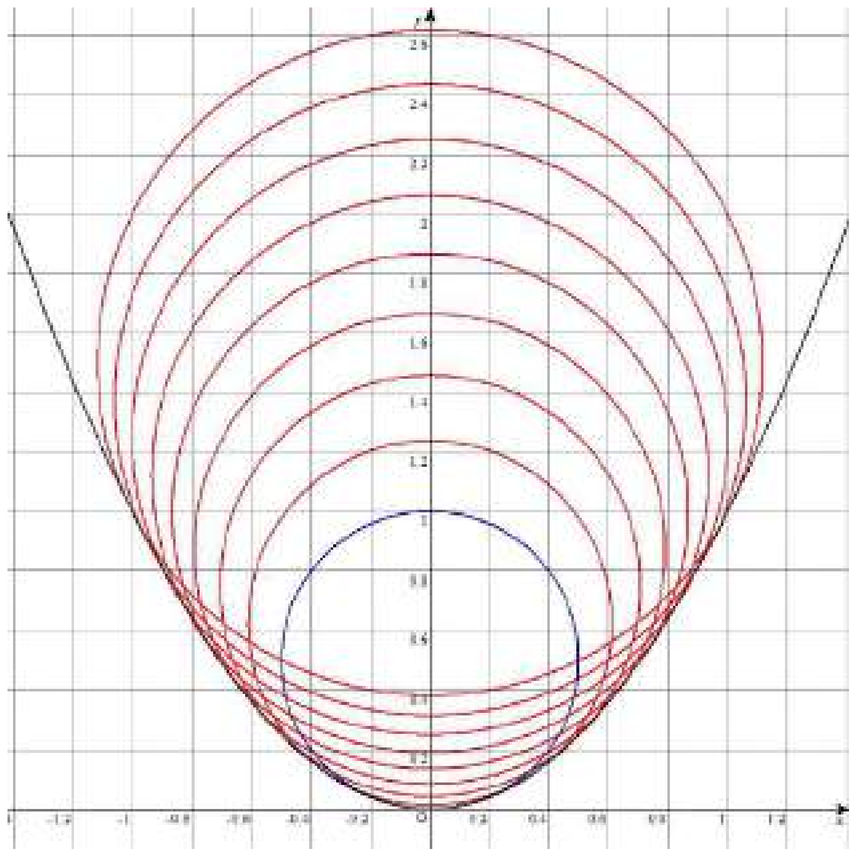
したがって、「半径 $r = 1/2$ の円のとき、四重解による接点(0 , 0)」となり、「放物線 $y = x^2$ の、頂点における曲率半径 $r = 1/2$」を表しています。

中心の高さ $h$（つまり半径 $r$）を変化させて描くと、右図のように

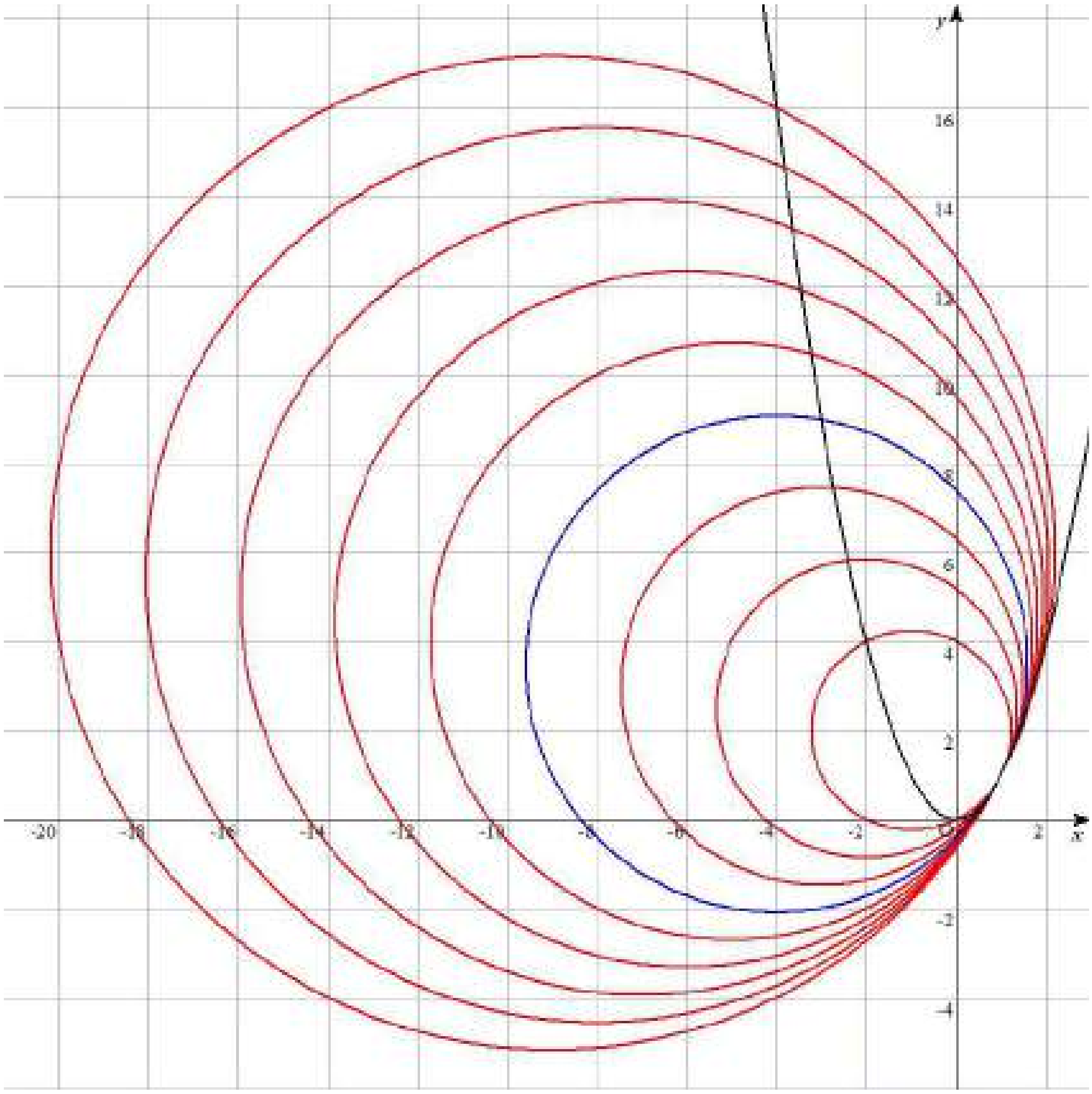
$h > 1/2$（半径 $r > 1/2$）のとき
　放物線は２点で円に外接する.

$h = 1/2$（半径 $r = 1/2$）のとき
　放物線は頂点で円に外接する.

こととなります。



［注 3］「放物線に点(1, 1)で接する円」



［注 4］「曲線 $y$ の曲率半径を求める公式 $r=\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}/y''$」の証明.

$y'=tan\theta$ ， $ds=rd\theta$ つまり $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}$ ，

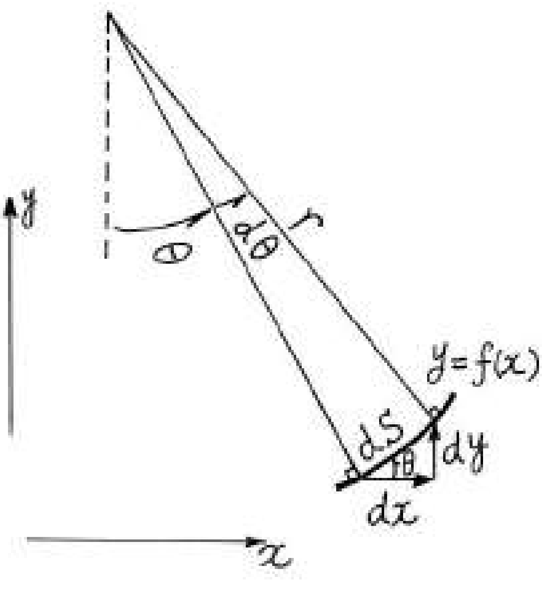
$\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dx}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\sqrt{1+(y')^2}$ .

より、

$y''=\left(\frac{d}{d\theta}tan\theta\right)\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dx}=(1+tan^2\theta)\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dx}$

$=\{1+(y')^2\}\frac{1}{r}\sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{r}\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}$ .

∴ $r=\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}/y''$ .



「感想」
・放物線の頂点の話は、黒田先生の勉強会で「曲率半径」を教えていただいたことがあったので、何とか理解できました。私は高校で教えた経験がなく、放物線の焦点や準線をちゃんと教えてもらった記憶もないのだけれど、大切な内容だと思いました。(矢野)

・凸面鏡が放物面ではなく球面で代用されていて実際に有効に使われているのですね。
　頂点に接する円と２点で接する円の２通りの説明は丁寧で私の疑問にすべて答えてくれていました。(鈴木)

・放物線と円の関係は焦点の問題は難しくなるけども、２つの 2 次曲線図形の関係をたとえば円の中心とか半径にパラメータを入れて考えると交点や接点がどうなるかなど、別のことを考えてしまいました。(広田)