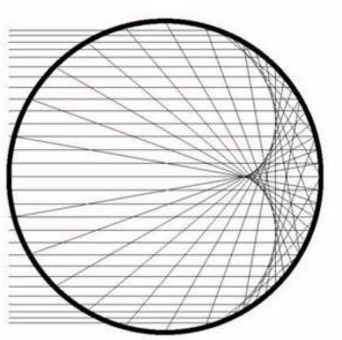
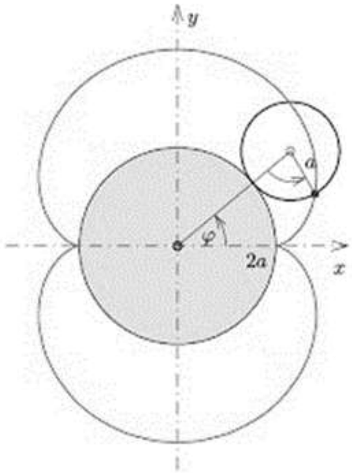
ネフロイド、円、放物線　　山田敏昭

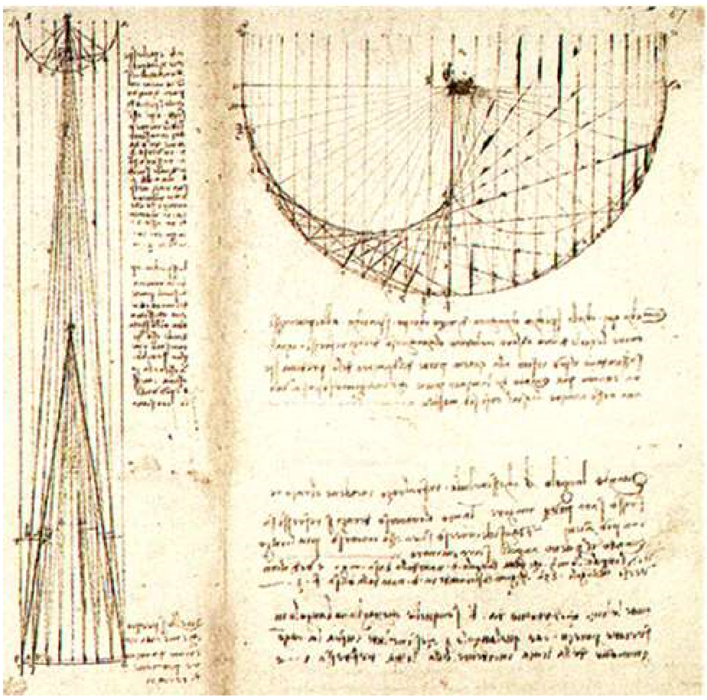
「頂点付近で放物線と円が近い」というテーマが話題になり、「球面鏡と放物面鏡の焦点を同じとみなす」という話も聞いて、面白いと思いました。私も昔書いたレポートを思い出したので、新しく書き直してみました。

（生徒向けの話題提供という程度です。）

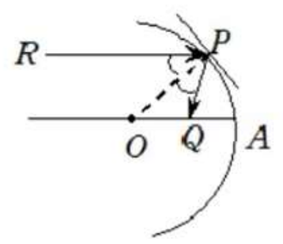
1 反射光の包絡線

太陽光などの平行光線がカップで反射するとネフロイドを描きます。これはR：r＝２：１の外サイクロイドで、実は反対側にも「くびれ」があります。光が1点に集まるわけでなく、包絡線を描き、火線、焦線(caustic)などと呼ばれます。中段はレオナルド･ダヴィンチの図。この図の左側を見ると、球面鏡の焦点を近似的に「くびれ」の点とみなしているようです。最下段は教科書にある極限の演習問題。答はこの「くびれ」の点で、半径の半分の位置です。



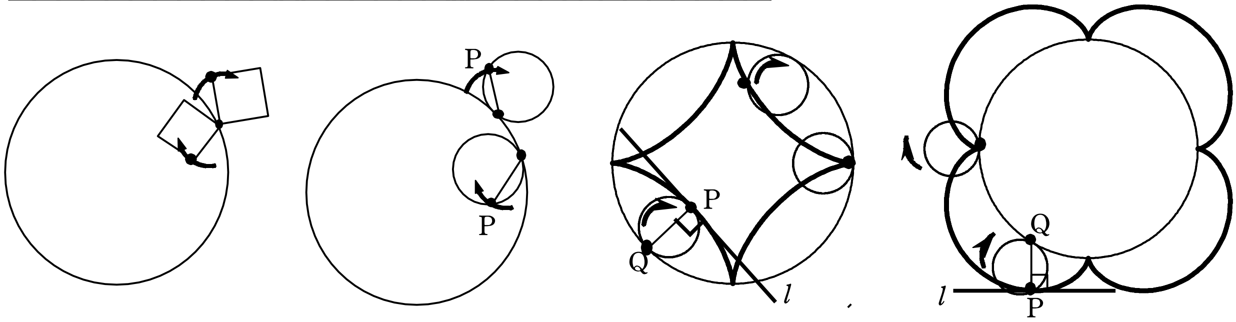
点Oを中心とする球面鏡がある。右図のように、この球面鏡の軸OAに平行な光線RPが点Pで一度反射してOAと出会う点をQとする。PがAに限りなく近づくとき、Qはどのような点に近づくか。（啓林館　数学Ⅲ）



$\boxed{2}$ サイクロイドの接線

正方形が円周上を転がるとき、頂点は接点を中心とする円を描きます。正多角形も同様だから、その極限である円でもPは瞬間的に接点を中心とする円を描きます。よって、

$\boxed{\text{内外サイクロイド上の点Pにおける接線}\ l\ \text{は、図のPQに垂直である。}}$



$\boxed{3}$ ネフロイドが反射光の包絡線になる理由

図の左方から入射した光は半径４の円Ｃ上の点Rで反射し、RP方向へ進みます。

このとき、Ｐは半径２の円周上を転がる半径１の円周上の点でもあるからネフロイド上の点です。

さらに、RQは円の直径だからRP⊥PQです。よって上記$\boxed{2}$よりRPはネフロイドの接線です。

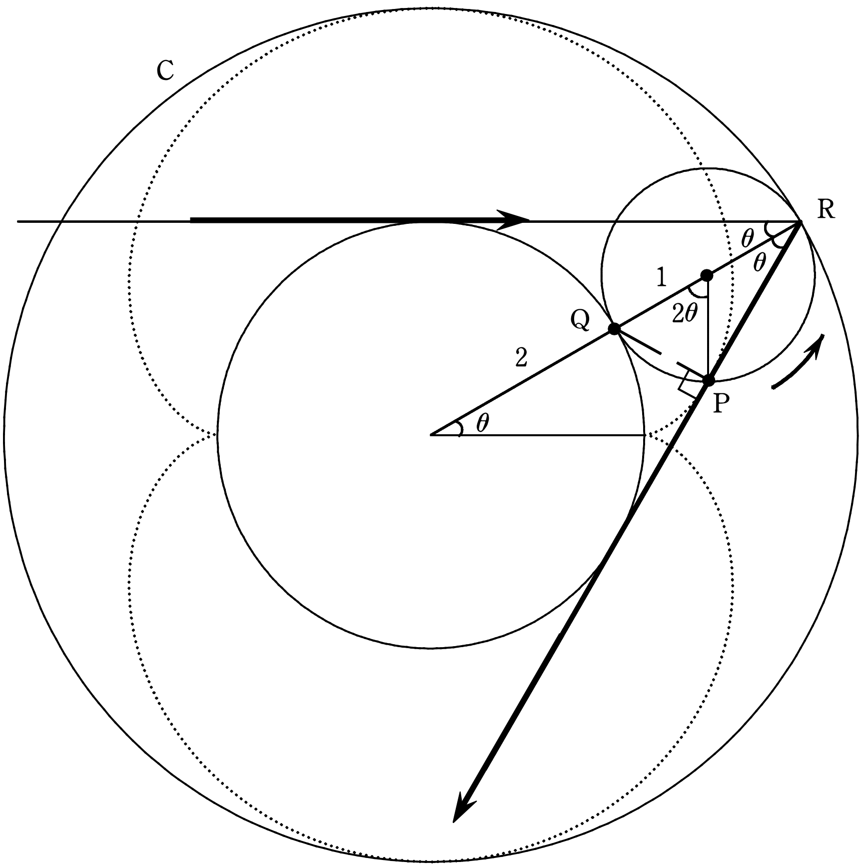
以上より、反射光RPの包絡線はネフロイドです。

図よりネフロイドの「くびれ」の位置は$\theta=0$のときで、円Cの半径の半分の点。

また、図から方程式は$P(x, y)$として円Cの中心を原点とすれば、

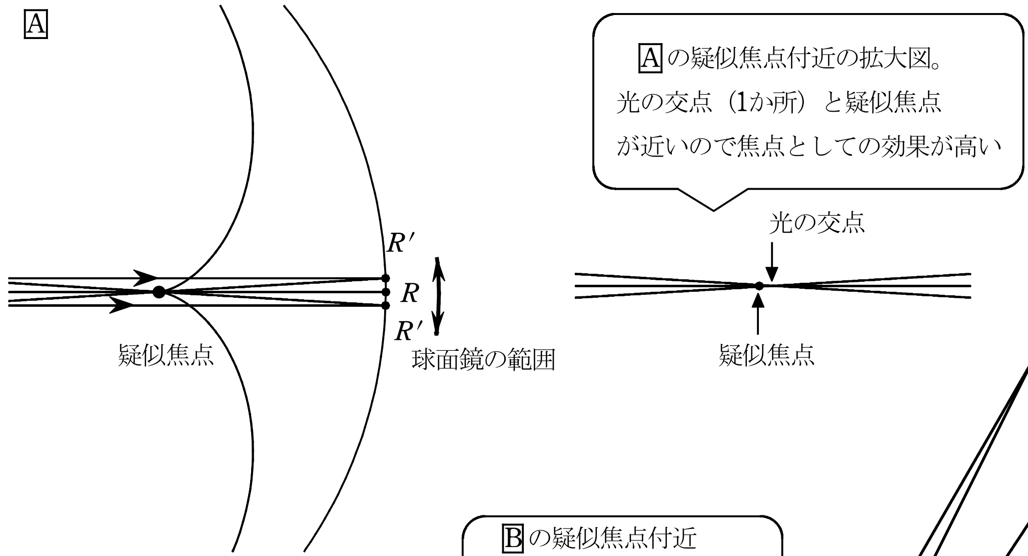
$$\begin{cases} x=3\cos\theta-\cos 3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta \end{cases}$$

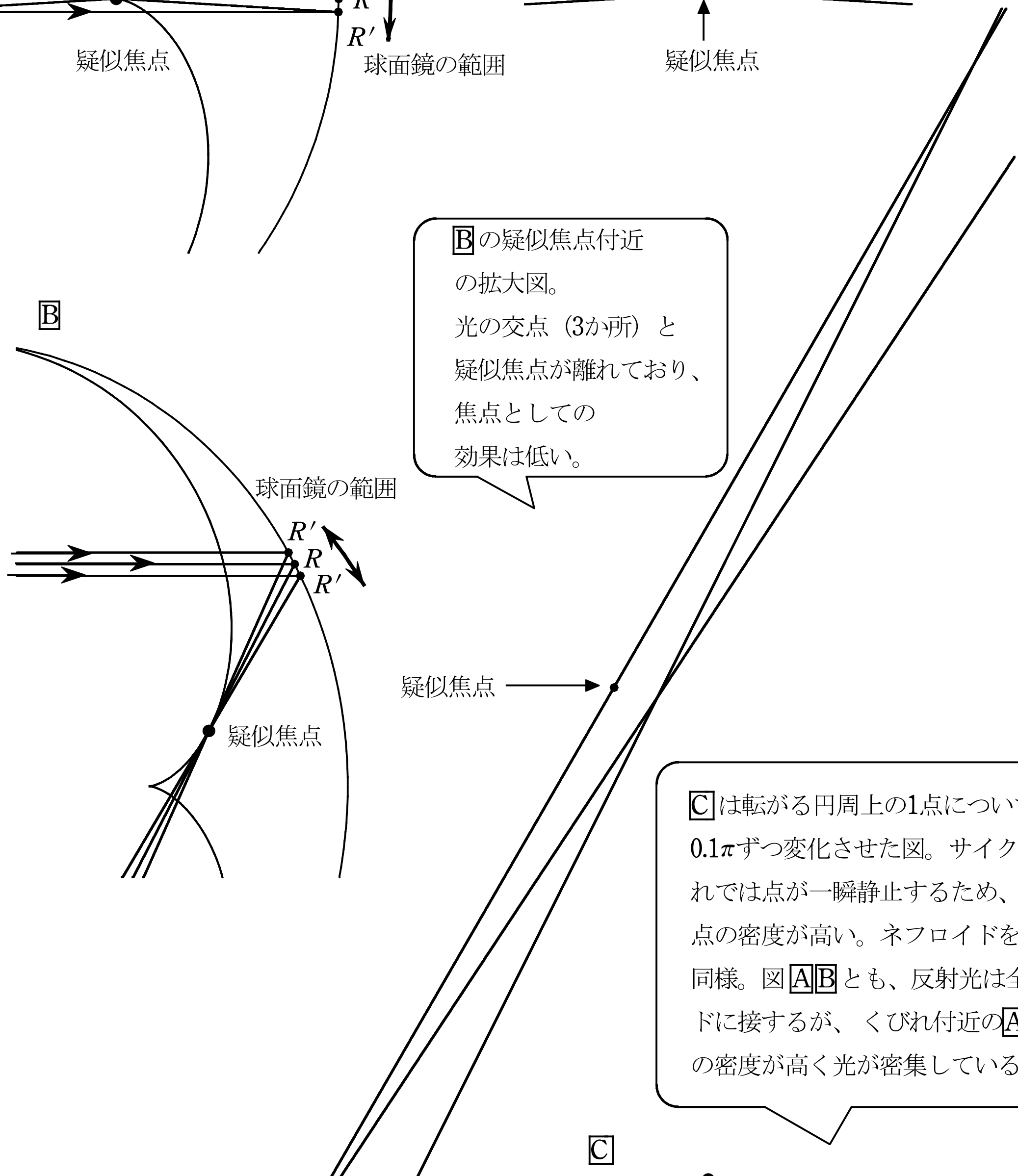
ですが、ここでは特に必要ありません

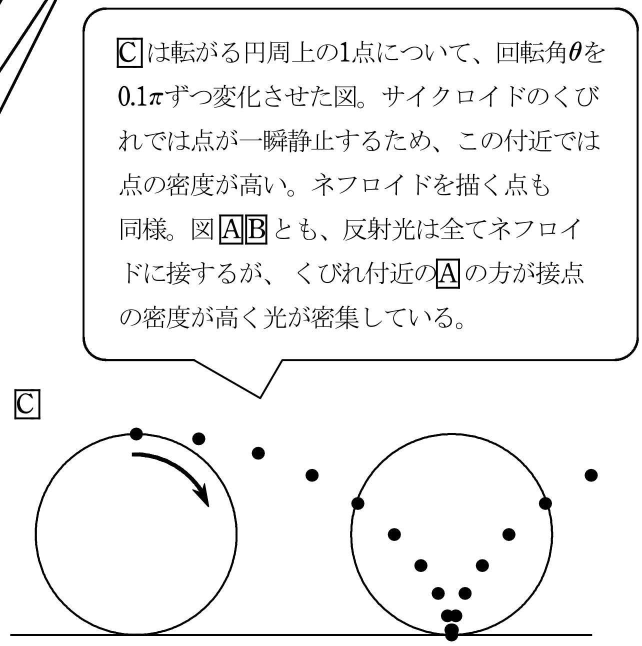


4 球面鏡の疑似焦点はネフロイド上にある

図Aは球面にほぼ垂直に入射した平行光の反射、図Bは球面に斜めに入射した平行光の反射で、点Rと２つの点R'の距離はともに中心角が±約1.7° です。$R' \to R$ の極限で反射光の交点はネフロイド上の点になります。よって球面の狭い範囲を鏡にすれば、焦点（疑似焦点）はネフロイド上にあると言えます。ここで、A、Bの同倍率の拡大図をみると、Aの方が、光が疑似焦点付近に集まり、焦点としての効果は高い。この理由の感覚的な説明が図 C です。





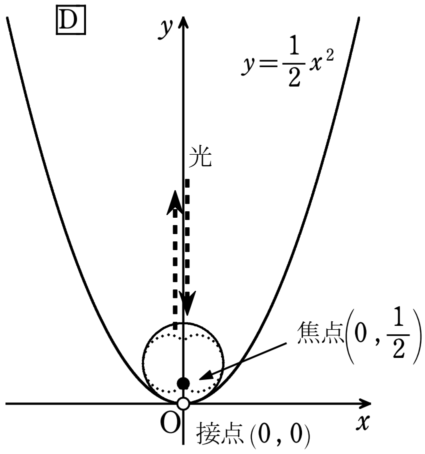


5 放物線上のいろいろな点を円で近似する

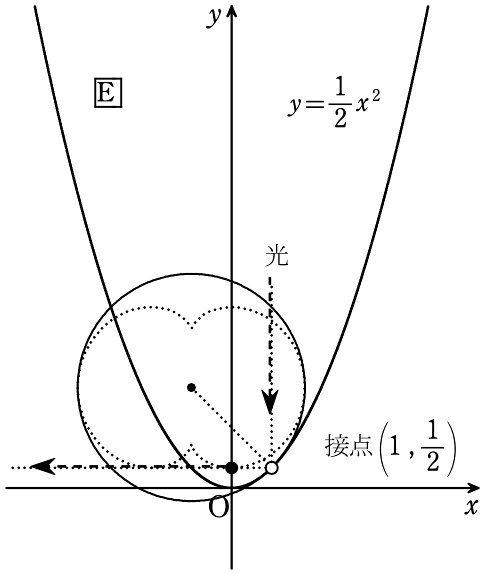
放物線$y=\frac{1}{2}x^2$ について、真上から入射する平行な光を考えます。図DEFのように、放物線の各点に接し、焦点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$をネフロイドが通るような円を描くことができます。これは放物面鏡の接点付近を球面鏡で近似できることを表します。

上記4より,放物面で反射した光を最もよく近似する球面鏡は接点が頂点の場合（図D）と言えます。（円の作図に使った曲率半径の公式は生徒に示す必要はありません）

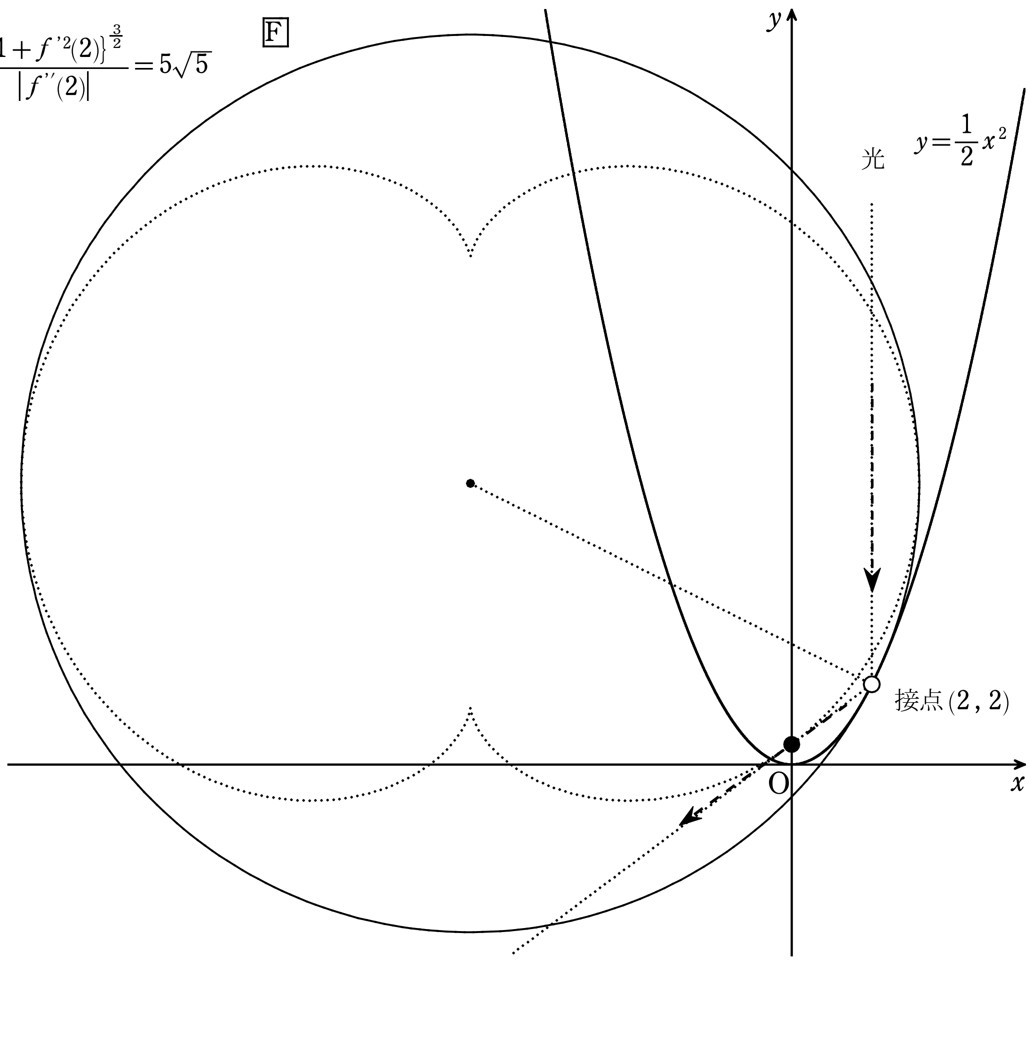
$$R=\frac{\{1+f'^2(0)\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\left|\frac{1}{f'(0)}\right|=1$$



$$R=\frac{\{1+f'^2(1)\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(1)|}=2\sqrt{2}$$



$$R=\frac{\{1+f'^2(2)\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(2)|}=5\sqrt{5}$$



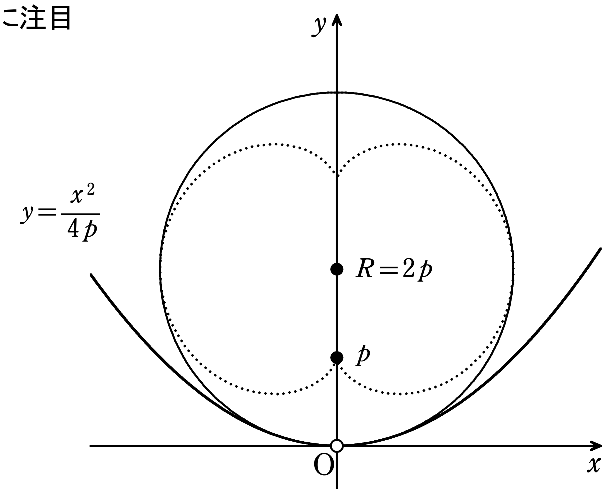
6 放物線の頂点付近（疑似焦点の近似が最も良い）に注目

放物線 $y=\dfrac{x^2}{4p}$ $(p>0)$ …① の焦点は $(0, p)$ で、

頂点付近を半径 R の円で近似したとすると、

球面鏡の焦点は $\dfrac{R}{2}$ だから、

$\dfrac{R}{2}=p$ より $R=2p$ …②



7 一般の関数の極値の点付近を円で近似する

一般の $y=f(x)$ では $x=a$ の付近は第2次近似で

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

（この近似式を高校生に解説する方法はいくつか

あるようですが、このレポートでは省略します。）

極値をとる点では $f'(a)=0$ より

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

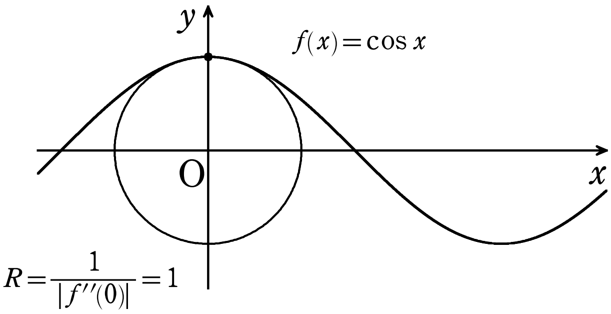
これは極値の点を原点にとれば

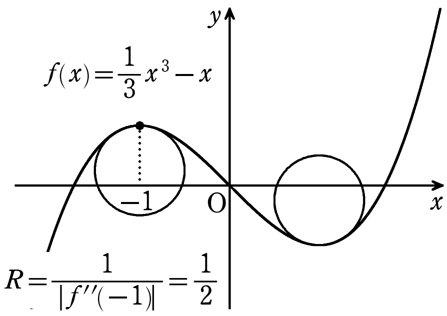
$y=\dfrac{1}{2}f''(a)\cdot x^2$ …③ ですから、

①③を比べて $\dfrac{1}{4p}=\dfrac{1}{2}|f''(a)|$

$p=\dfrac{1}{2|f''(a)|}$ …④

②④より $R=\dfrac{1}{|f''(a)|}$ …⑤





③⑤より、$f''(a)$ は次のような意味をもつと生徒に説明できます。

- 極値の点の付近を放物線と考えると
  $\dfrac{1}{2}f''(a)$ は x^2 の係数で、$f''(a)$ の正負は放物線の凹凸の向き、つまり極大極小の違いを表す。
- 極値の点の付近を円と考えると
  $\dfrac{1}{|f''(a)|}$ は半径を与える

「感想」

・ネフロイドの話は難しかったです。そもそもカップで反射した写真のような現象に今まで気付いていなかったし、ネフロイドという言葉も知らなかったです。やっぱり高校の内容は高級だと思いました。（矢野）

・媒介変数表示でしか表されない図形ので中ネフロイドが一番好きです。それが反射光の包絡線になっていることを知ってうれしかったです。球面鏡の疑似焦点がくびれ付近で有効（放物面の頂点付近が最も球面鏡として有効）であること、同様にして一般の関数でも極値の点付近が円で近似するのが有効であることがよくわかりました。（鈴木）